The Project Gutenberg EBook of Abrégé de la Théorie des Fonctions
Elliptiques, by Charles Henry

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with
almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or
re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included
with this eBook or online at www.gutenberg.org

Title: Abrégé de la Théorie des Fonctions Elliptiques
A l'Usage des Candidats a la Licence ès Sciences Mathématiques

Author: Charles Henry

Release Date: June 1, 2010 [EBook #32643]

Language: French

Character set encoding: ISO-8859-1

*** START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK FONCTIONS ELLIPTIQUES ***

Produced by Andrew D. Hwang, Joshua Hutchinson, and the
Online Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net
(This file was produced from images from the Cornell
University Library: Historical Mathematics Monographs
collection.)

NOTES SUR LA TRANSCRIPTION

Ce livre a été préparé à l'aide d'images fournies par la Cornell University Library: Historical Mathematics Monographs collection.

Ce fichier est optimisé pour être lu sur un écran, mais peut être aisément reformaté pour être imprimé. Veuillez consulter le préambule du fichier LaTeX source pour les instructions.

ABRÉGÉ

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

ABRÉGÉ

DE LA THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS
A LA LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Charles HENRY

Maître de Conférences a l'Ecole pratique des hautes études
Bibliothécaire à la Sorbonne
Membre de la Société mathématique de France

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, rue des écoles, 17
1895

AVANT-PROPOS

En lisant la dernière édition du *Cours d'analyse* de M. Camille Jordan, j'ai été frappé de la façon magistrale dont y est exposée la théorie des fonctions elliptiques. Afin de mieux m'assimiler cette partie importante d'un ouvrage où tout est à méditer, j'en ai fait à mon usage un abrégé où je ne me suis pas interdit de faire entrer par ci par là des souvenirs d'autres lectures et aussi quelques idées personnelles. Ce travail achevé, il m'a semblé que d'autres que moi pourraient en tirer profit ; de là ce petit livre, où, ne cherchant pas à dissimuler la source à laquelle j'ai si largement puisé, j'ai conservé toutes les notations qu'a employées M. Jordan.

L'étudiant qui pour la première fois ouvre un traité des fonctions elliptiques est souvent rebuté par la multiplicité des formules et l'abondance des calculs, dont il n'aperçoit pas toujours le but. Mettre en relief les idées principales, signaler nettement l'objet qu'on se propose, éviter les longues transformations algébriques qui ne servent qu'à le masquer, telle est la pensée qui a présidé à la composition de cet opuscule d'ailleurs purement didactique.

Pour en alléger le plus possible le contenu, je n'ai pas hésité à sacrifier certains développements de la théorie, intéressants mais non indispensables pour la faire comprendre. Mon désir est d'être lu non seulement avec fruit, mais sans fatigue, par les candidats à la licence ès sciences mathématiques, à qui je m'adresse plus particulièrement.

1er Octobre 1894.

PREMIÈRE PARTIE

GÉNÉRALITÉS
CONCERNANT LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

CHAPITRE I

DES PÉRIODES.

Dans tout ce qui suit, nous supposons connus les principes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, principes dont nous aurons soin, d'ailleurs, de rappeler l'énoncé d'une manière suffisamment nette chaque fois que le besoin s'en fera sentir.

1. *Définitions.* — On dit qu'une fonction $f(u)$ est *périodique* et admet la période 2ω, si elle satisfait à la relation

$$f(u+2\omega) = f(u).$$

On peut se demander s'il existe des fonctions admettant un nombre *quelconque* de périodes. Nous allons voir qu'une fonction *analytique uniforme* ne peut admettre plus de *deux* périodes *distinctes*. De là l'intérêt qui s'attache à l'étude des fonctions doublement périodiques.

Nous appelons FONCTION ELLIPTIQUE *toute fonction analytique uniforme doublement périodique, n'ayant pas d'autres singularités que des pôles.*

Une fonction elliptique $f(u)$ n'a donc, dans le plan de la variable complexe u, aucun point essentiel à distance finie de l'origine.

Expliquons le terme de *périodes distinctes* dont nous venons de nous servir. Si $f(u)$ admet plusieurs périodes $2\omega, 2\omega', \dots$, elle admet évidemment pour période toute quantité

$$2m\omega + 2m'\omega' + \cdots,$$

où $m, m', \dots$ sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Si toutes ces quantités sont différentes, on dit que les périodes $2\omega, 2\omega', \dots$ sont *distinctes.* Quand les périodes ne sont pas distinctes, il existe entre elles une relation linéaire et homogène à coefficients entiers, puisque pour deux systèmes au moins de valeurs $m_1, m'_1, \dots; m_2, m'_2, \dots$ attribuées aux entiers $m, m', \dots$, on doit, par hypothèse, avoir

$$2m_1\omega + 2m'_1\omega' + \cdots = 2m_2\omega + 2m'_2\omega' + \cdots.$$

2. Théorème. — *Une fonction analytique uniforme ne peut avoir plus de deux périodes distinctes, à moins de se réduire à une constante.*

Supposons que la fonction $f(u)$ ait trois périodes distinctes

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha' + \beta' i, \qquad 2\omega'' = \alpha'' + \beta'' i.$$

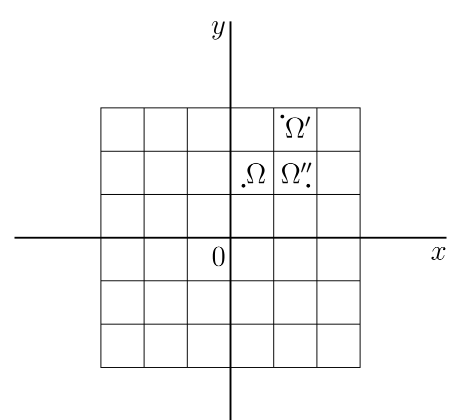
Toute quantité

$$\begin{aligned}\Omega &= 2m\omega + 2m'\omega' + 2m''\omega'' \\ &= m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + (m\beta + m'\beta' + m''\beta'')i\end{aligned}$$

est une période de $f(u)$.

Figurons, dans le plan de la variable complexe u, le point dont l'affixe est Ω. Ce point a pour abscisse $m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha''$ et pour ordonnée $m\beta + m'\beta' + m''\beta''$.

En donnant à chacun des entiers m, m', m'' la suite des valeurs $0, 1, \dots, k$, on obtient évidemment $(k+1)^3$ périodes Ω. Chacun des points correspondants a une abscisse et une ordonnée moindres en valeur absolue que



$$k\mathrm{M} + k\mathrm{M} + k\mathrm{M} = 3k\mathrm{M},$$

M étant une limite supérieure des six quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$.

Les $(k+1)^3$ points Ω sont donc tous compris à l'intérieur d'un carré dont le centre est à l'origine et dont les côtés, parallèles aux axes, ont pour longueur $6k\mathrm{M}$.

Donnons à k la valeur $n^2 - 1$. Les points Ω sont au nombre de n^6. Ils sont tous contenus dans un carré de côté $6(n^2-1)\mathrm{M}$. On peut, par des parallèles aux axes, diviser ce carré en n^6 autres de côté $\dfrac{6(n^2-1)\mathrm{M}}{n^3}$.

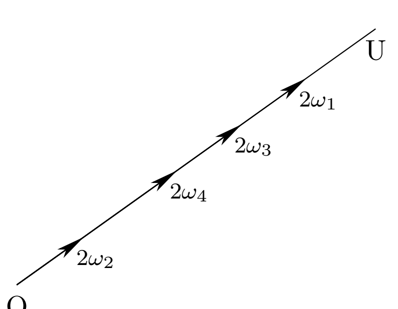
Cela posé, si les périodes sont distinctes, les n^6 points Ω le sont aussi. Dès lors ou bien deux d'entre eux, au moins, tombent dans une même case ; ou bien il n'y a qu'un point par case, mais alors toutes les cases sont occupées.

Dans tous les cas, il y aura deux de ces points, Ω', Ω'', dont la distance est moindre, comme on le voit immédiatement, que le triple du côté de chaque petit carré, c'est-à-dire moindre que $\dfrac{18(n^2-1)\mathrm{M}}{n^3}$, quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut en faisant croître n.

Mais la différence $\Omega' - \Omega''$ est une période, et elle a précisément pour module la distance des deux points Ω', Ω''. La fonction $f(u)$ admet donc une période infiniment petite. Ainsi, dans toute région, les points pour lesquels la fonction analytique uniforme $f(u)$ reprend la même valeur ne seraient point isolés, ce qui est impossible (à moins que $f(u)$ ne se réduise à une constante).

3. Théorème. — *Une fonction analytique uniforme ne peut avoir deux périodes distinctes dont le rapport τ soit réel, à moins qu'elle ne se réduise à une constante.*

Figurons dans le plan de la variable u les deux segments $2\omega_1, 2\omega_2$, qui représentent les périodes. Puisque le rapport $\dfrac{2\omega_2}{2\omega_1} = \tau$ est réel, les segments ont la même direction OU ou sont dans le prolongement l'un de l'autre. On peut toujours supposer τ positif, sans quoi l'on prendrait pour période $2\omega_1$ et $-2\omega_2$ (qui est aussi une période), et l'on serait ramené à ce cas.



Les points $2\omega_1, 2\omega_2$ sont alors d'un même côté de l'origine O.

La différence $2\omega_1 - 2\omega_2 = 2\omega_3$ est une période ; nous supposons que le terme soustractif $2\omega_2$ a le plus petit module ; sinon nous ferions la différence en sens inverse. Le point $2\omega_3$ est alors situé sur la direction OU.

Supposons mod. $2\omega_3 >$ mod. $2\omega_2$; on fera la différence $2\omega_3 - 2\omega_2 =$

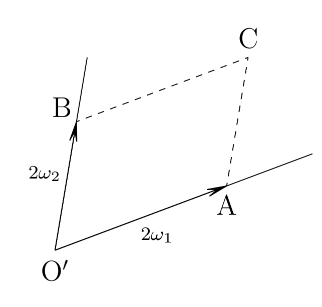
$2\omega_4$; c'est une période, et le point $2\omega_4$ tombe encore sur la direction OU.

En opérant toujours de la même manière, on obtient une suite de points, tous situés sur la droite OU entre l'origine et le point $2\omega_1$.

Si ces points, où la fonction $f(u)$ reprend la même valeur, sont en nombre indéfini, $f(u)$ admet une période infiniment petite ; il faut donc qu'elle se réduise à une constante.

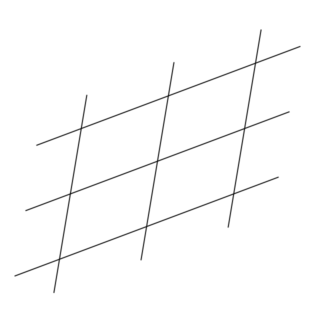
S'ils sont en nombre limité, c'est que l'une des périodes $2\omega'_n$ à laquelle on arrive se confond avec une période déjà obtenue $2\omega_n$. Mais il est évident, d'après la manière dont on les a formées, que ces deux périodes sont des fonctions linéaires, homogènes, à coefficients entiers, de $2\omega_1, 2\omega_2$. Ces deux-ci ne seraient donc pas distinctes, ce qui va contre l'hypothèse.

4. *Parallélogramme des périodes.* — La question se pose maintenant de diviser le plan de la variable complexe u en régions telles que, lorsque u décrit l'une de ces régions, la fonction doublement périodique $f(u)$ prend toutes les valeurs qu'elle peut acquérir.



A partir d'un point O′ (qui peut être ou ne pas être l'origine O des coordonnées) portons deux droites représentant en grandeur et en direction les deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. — Ces deux droites font un angle qui n'est pas nul, d'après le théorème précédent. On peut donc sur ces deux droites construire un parallélogramme O′ACB ; ce sera le *parallélogramme des périodes.*

Ce parallélogramme est la région cherchée. Construisons en effet le réseau complet des parallélogrammes égaux à celui-là, de manière à en recouvrir tout le plan. Les sommets de ce réseau seront les points



$$O' + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Un point quelconque U a pour homologue dans le parallélogramme O′ACB un point u

tel que

$$\mathrm{U} = u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

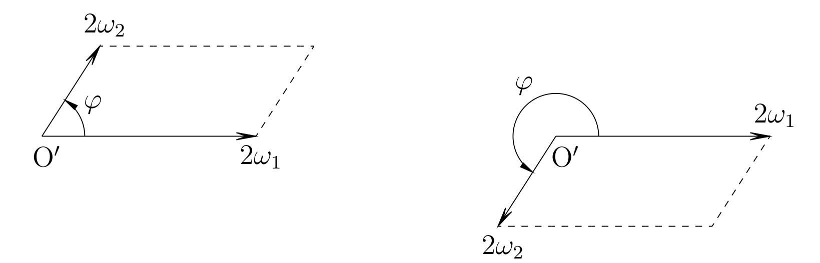
On a donc $f(\mathrm{U}) = f(u)$, ce qui prouve bien que toutes les valeurs que peut prendre $f(u)$ se trouvent dans le seul parallélogramme O′ACB.

Les éléments les plus intéressants du parallélogramme des périodes sont fournis par l'étude du rapport

$$\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 i}{\alpha_1 + \beta_1 i} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} i = r + si.$$

Le signe de la partie imaginaire s de ce rapport, signe qui d'ailleurs est celui de $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, va décider d'une question dont nous apprécierons par la suite toute l'importance : Quand on fait le tour du parallélogramme en s'éloignant du point O′ suivant la ligne $2\omega_1$, la circulation aura-t-elle lieu dans le sens direct ou dans le sens rétrograde ?

L'argument du quotient de deux quantités complexes étant égal à l'excès de l'argument du dividende sur l'argument du diviseur, l'argument de τ sera égal à l'angle φ des deux directions $2\omega_1$, $2\omega_2$, angle qu'on obtient par la rotation dans le sens *direct* d'une droite couchée d'abord sur $2\omega_1$ et venant ensuite s'appliquer sur $2\omega_2$.



Quand l'angle φ est plus petit que π, il est clair, comme le montre la première des deux figures ci-dessus, que la circulation autour du parallélogramme s'opère dans le sens direct ; elle se fait dans le sens rétrograde (2[e] figure), lorsque φ est plus grand que π.

Or si l'on appelle ρ le module de τ, on a

$$\tau = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r + si,$$

d'où l'on conclut : $\rho \sin\varphi = s$; c'est-à-dire que $\sin\varphi$ a le signe de s. Donc, quand on suit le contour dans le sens direct, φ étant plus petit que π, s est positif ; dans le sens rétrograde, s est négatif.

Remarquons encore la signification intéressante du numérateur de

$$s = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}.$$

Si nous portons notre attention sur le triangle O′AB, qui est la moitié du parallélogramme des périodes, nous voyons que ses sommets O′, A, B ont respectivement pour coordonnées (si l'on place l'origine en O′)

$$0, 0; \qquad \alpha_1, \beta_1; \qquad \alpha_2, \beta_2.$$

Donc la surface de ce triangle a pour mesure

$$\frac{1}{2}|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

Par conséquent $|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$ représente l'aire du parallélogramme des périodes.

5. *Réseau des périodes équivalentes.* — En considérant le réseau de parallélogrammes construit sur les deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$, on est amené à se demander si on ne pourrait pas construire sur d'autres périodes un réseau ayant exactement les mêmes sommets que celui-là.

Le problème consiste à chercher ces nouvelles périodes $2\omega'_1, 2\omega'_2$, *équivalentes* aux périodes données.

Il y a une infinité de couples de périodes équivalentes. On obtient tous ces couples de la manière suivante.

Posons

$$2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2,$$

a et b étant deux entiers quelconques premiers entre eux, et déterminons deux nouveaux entiers c et d (nécessairement premiers entre eux) par la condition

$$ad - bc = \pm 1$$

(il y a une infinité de nombres c, d répondant à la question) ; puis posons

$$2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

Je dis que $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$ est un couple de périodes équivalentes à $2\omega_1, 2\omega_2$. En effet les formules

$$2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2$$

montrent manifestement que *tous* les sommets du réseau R' des périodes $2\omega'_1, 2\omega'_2$ se trouvent *parmi* les sommets du réseau R des périodes $2\omega_1, 2\omega_2$.

Mais ces équations, résolues par rapport à $2\omega_1, 2\omega_2$, donnent, si l'on tient compte de ce que le déterminant $ad - bc$ est égal à ± 1,

$$2\omega_1 = \pm(2d\omega'_1 - 2b\omega'_2), \qquad 2\omega_2 = \pm(-2c\omega'_1 + 2a\omega'_2).$$

Ces nouvelles formules, où les coefficients de ω'_1, ω'_2 sont des *entiers*, prouvent que *tous* les sommets du réseau R se trouvent parmi les sommets de R'.

Les deux réseaux ont donc exactement les mêmes sommets, c. q. f. d.

L'aire de chaque parallélogramme du nouveau réseau est égale à l'aire de chaque parallélogramme de l'ancien.

En effet si l'on pose

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= \alpha_1 + \beta_1 i, & 2\omega_2 &= \alpha_2 + \beta_2 i, \\ 2\omega'_1 &= \alpha'_1 + \beta'_1 i, & 2\omega'_2 &= \alpha'_2 + \beta'_2 i, \end{aligned}$$

l'aire du parallélogramme des nouvelles périodes est égale à

$$\begin{aligned} |\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1| &= |(a\alpha_1 + b\alpha_2)(c\beta_1 + d\beta_2) - (c\alpha_1 + d\alpha_2)(a\beta_1 + b\beta_2)| \\ &= |(ad - bc)(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)| = |\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2|, \end{aligned}$$

ce qui démontre bien que les mailles des deux réseaux sont équivalentes.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ([1]).

6. *Enoncé du problème de la transformation.* — Une fonction elliptique $f(u, \omega_1, \omega_2)$ aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ est connue en tout point du plan si l'on connaît la succession des valeurs qu'elle prend dans l'un des parallélogrammes construits sur ces deux périodes, par exemple, pour fixer les idées, dans celui qui contient l'origine. La succession de ces valeurs elle-même est complètement déterminée quand on se donne certains éléments en nombre fini.

Ainsi $f(u, \omega_1, \omega_2)$ est déterminée quand on se donne, à l'intérieur du parallélogramme en question, ses pôles, ses zéros, leur ordre de multiplicité, et de plus la valeur f_0 de la fonction pour $u = 0$ (si cette fonction est finie à l'origine) ou, si l'origine est un pôle, la valeur C du terme constant dans le développement de la partie infinie (voir plus loin, 1re partie, ch. III, 13).

Si la position des zéros et des pôles ainsi que la valeur f_0 (ou C) sont des fonctions données des périodes, on peut se demander quelle relation existe entre $f(u, \omega_1, \omega_2)$ et la fonction $f(u, \omega_1', \omega_2')$ aux périodes $2\omega_1', 2\omega_2'$ liées à $2\omega_1, 2\omega_2$ par les relations à coefficients entiers

$$2\omega_1 = 2a\omega_1' + 2b\omega_2', \qquad 2\omega_2 = 2c\omega_1' + 2d\omega_2'.$$

C'est dans la recherche de cette relation que consiste le problème de la *transformation des fonctions elliptiques*. Nous verrons plus loin (2e partie, ch. IV, 39) que $f(u_1, \omega_1, \omega_2)$ est liée à sa transformée $f(u_1, \omega_1', \omega_2')$ par une équation algébrique.

6 *bis. Transformation du premier degré.* — Lorsque le déterminant $ad - bc$ a pour valeur ± 1, c'est-à-dire lorsque la substitution d'un couple

([1]) On peut, dans une première lecture, sauter ce chapitre, dont la place naturelle nous a semblé être immédiatement après l'étude des périodes et des réseaux.

de périodes à l'autre conserve les sommets du réseau, la transformation est du *premier degré*.

Il y a des fonctions elliptiques que n'altère pas la transformation du premier degré. Telle est celle que Weierstrass a nommée $\wp u$. Cette fonction $\wp u$ a, à l'origine, un pôle double, sans résidu, avec l'unité pour coefficient du terme de degré -2 ; elle n'a pas d'autre pôle à l'intérieur du parallélogramme des périodes qui contient l'origine, enfin la différence $\wp u - \dfrac{1}{u^2}$ s'annule avec u. Ces conditions, comme nous le verrons, suffisent pour déterminer $\wp u$. Or $\wp u$ conserve sa valeur au point u lorsqu'on change les périodes en gardant les sommets du réseau. C'est une propriété dont ne jouissent pas les fonctions elliptiques autrefois introduites dans la science par Abel et Jacobi, et c'est là un des avantages de la fonction $\wp u$ sur ces anciennes fonctions.

7. *Transformations d'un degré quelconque.* — Lorsque le déterminant $ad - bc$ est égal, en valeur absolue, à un entier n, on dit que la transformation est *de degré* n. Quand n est plus grand que 1, le problème de la transformation peut être simplifié : au lieu d'effectuer d'un coup la transformation la plus générale du degré n, on obtient le même résultat en effectuant successivement quatre transformations beaucoup plus faciles.

La première de ces quatre transformations consiste à conserver l'une des périodes et à remplacer l'autre par la $\theta^{ième}$ partie de sa valeur, θ étant le plus grand commun diviseur de a et de b.

La deuxième transformation est du premier degré.

La troisième aussi.

La quatrième consiste à remplacer l'une des périodes par la $n'^{ième}$ partie de sa valeur $\left(n' = \dfrac{n}{\theta}\right)$ en conservant l'autre période.

Démontrons tout ceci.

Si a', b' sont les quotients (nécessairement premiers entre eux) de a, b par leur plus grand commun diviseur θ, la transformation proposée

pourra être mise sous la forme

$$\begin{cases} \omega_1 = \theta a' \centerdot \omega_1' + \theta b' \centerdot \omega_2', \\ \omega_2 = c\omega_1' + d\omega_2', \end{cases}$$

et, si l'on pose $\dfrac{\omega_1}{\theta} = \Omega_1$, $\omega_2 = \Omega_2$, celle-ci pourra être remplacée par les deux suivantes effectuées l'une après l'autre

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_1 = \theta\Omega_1, \\ \omega_2 = \Omega_2, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (1') \quad \begin{cases} \Omega_1 = a'\omega_1' + b'\omega_2', \\ \Omega_2 = c\omega_1' + d\omega_2'. \end{cases}$$

La transformation (1) est la première des quatre transformations annoncées ; on y conserve la période ω_2 et l'on y remplace ω_1 par $\dfrac{\omega_1}{\theta}$.

II nous faut maintenant décomposer en trois autres la transformation $(1')$ au déterminant

$$a'd - b'c = \frac{ad - bc}{\theta} = \frac{n}{\theta} = n'.$$

Tous les sommets du réseau $\mathscr{R}$ des périodes $2\Omega_1, 2\Omega_2$ se trouvent *parmi* les sommets plus nombreux du réseau R' des périodes $2\omega_1', 2\omega_2'$. Mais nous allons montrer que, sur la direction $2\Omega_1$, ne se trouve aucun sommet de R' autre que ceux qui appartiennent déjà à $\mathscr{R}$. Ce fait important résulte de ce que a' et b' sont premiers entre eux.

En effet, si l'un des sommets du réseau R' est à l'origine (ce qu'on peut toujours supposer), tous les autres sont compris dans l'expression $2\alpha\omega_1' + 2\beta\omega_2'$ où α et β sont des entiers. S'il y avait q de ces sommets sur la direction $2\Omega_1$ entre deux sommets consécutifs du réseau $\mathscr{R}$, l'expression de tous ces sommets serait $\dfrac{p}{q}\, 2\Omega_1$, et comme $\Omega_1 = a'\omega_1' + b'\omega_2'$, il existerait des valeurs entières α, β pour lesquelles on aurait

$$\alpha\omega_1' + \beta\omega_2' = \frac{pa'}{q}\,\omega_1' + \frac{pb'}{q}\,\omega_2'.$$

Or ceci est impossible, car si l'on prend p premier avec q, comme a' et b' sont premiers entre eux, les nombres $\frac{pa'}{q}, \frac{pb'}{q}$ ne peuvent être l'un et l'autre des entiers.

Ce point acquis, conservons la période $2\Omega_1$, que nous appellerons 2O_1, et associons-lui une nouvelle période 2O_2 de façon à conserver les sommets du réseau $\mathscr{R}$. Les formules de transformation devront être

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = \text{O}_1, \\ \Omega_2 = \mu\text{O}_1 + \text{O}_2, \end{cases}$$

pour que le déterminant de la transformation soit égal à 1.

Cherchons maintenant à déterminer la direction O_2 de telle façon que, si nous substituons à $2\omega'_1, 2\omega'_2$ deux nouvelles périodes $2\text{O}'_1, 2\text{O}'_2$ ayant respectivement les mêmes directions que $2\text{O}_1, 2\text{O}_2$, les sommets du réseau R' soient conservés. Les formules de transformation seront

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{O}'_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2, \\ \text{O}'_2 = p\omega'_1 + q\omega'_2, \end{cases} \qquad a'q - b'p = 1.$$

La première de ces relations résulte de ce que, les deux réseaux $\mathscr{R}$ et R' ayant les mêmes sommets sur la direction 2O_1, on doit avoir $2\text{O}'_1 = 2\text{O}_1$. Or

$$\text{O}_1 = \Omega_1 = a'\omega' + b'\omega'.$$

Enfin la coïncidence des deux directions 2O_1 et $2\text{O}'_1$ et celle des deux directions $2\text{O}_2, 2\text{O}'_2$ s'exprimeront par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{O}_1 = \text{O}'_1, \\ \text{O}_2 = \lambda\text{O}'_2. \end{cases}$$

Tout ceci entraîne des équations de condition entre les inconnues μ, p, q, λ, et ces équations devront pouvoir être résolues en nombres entiers par rapport à ces quatre lettres.

Par la seconde des formules (3), O'_2 se trouve exprimé en fonction de ω'_1, ω'_2.

Exprimons O_2 au moyen des mêmes périodes. Des relations (2) et (1′) nous tirons

$$\mathrm{O}_2 = \Omega_2 - \mu\Omega_1 = (c\omega'_1 + d\omega'_2) - \mu(a'\omega'_1 + b'\omega'_2).$$

Substituant dans la dernière formule (4) ces expressions de $\mathrm{O}_2, \mathrm{O}'_2$, on a

$$(c\omega'_1 + d\omega'_2) - \mu(a'\omega'_1 + b'\omega'_2) = \lambda(p\omega'_1 + q\omega'_2).$$

Les périodes $2\omega'_1, 2\omega'_2$ ne pouvant être liées par une relation linéaire et homogène à coefficients entiers, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} c - \mu a' &= \lambda p, \\ d - \mu b' &= \lambda q, \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad a'q - b'p = 1.$$

Ce sont là trois équations qui doivent livrer des valeurs entières pour λ, μ, p, q. Éliminant μ entre les deux premières, on trouve

$$\lambda(aq - bp) = a'd - b'c,$$

c'est-à-dire $\lambda = n'$.

La première équation donne alors

$$\mu = \frac{c - n'p}{a'} = \frac{c - (a'd - b'c)p}{a'} = \frac{c(1 + b'p)}{a'} - pd$$
$$= c\frac{a'q}{a'} - pd = cq - dp.$$

On trouve bien pour μ une valeur entière.

Enfin p et q ne sont assujettis qu'à la condition

$$a'q - b'p = 1$$

vérifiée par une infinité de nombres entiers.

Résumons-nous et concluons.

On veut effectuer sur la fonction elliptique $f(u)$ la transformation générale du degré n

$$\begin{cases} \omega_1 = a\omega'_1 + b\omega'_2, \\ \omega_2 = c\omega'_1 + d\omega'_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on cherche la relation entre $f(u, \omega_1, \omega_2)$ et $f(u, \omega'_1, \omega'_2)$.

On commencera par faire la transformation particulière de degré θ

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \theta\Omega_1, \\ \omega_2 = \Omega_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on cherchera la relation entre $f(u, \omega_1, \omega_2)$ et $f(u, \Omega_1, \Omega_2) = f\left(u, \dfrac{\omega_1}{\theta}, \omega_2\right)$; θ est le plus grand commun diviseur de a et b. On déterminera les quotients a', b' de a, b par θ ; on prendra deux nombres p, q assujettis à la condition

$$a'q - b'p = 1,$$

et l'on calculera le nombre $\mu = cq - dp$.

Cela fait, on effectuera la transformation du premier degré

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = \mathrm{O}_1, \\ \Omega_2 = \mu\mathrm{O}_1 + \mathrm{O}_2, \end{cases}$$

qui donnera la relation entre $f(u, \Omega_1, \Omega_2)$ et $f(u, \mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2)$.

D'autre part, on fera la transformation du premier degré

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{O}'_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2, \\ \mathrm{O}'_2 = p\omega'_1 + q\omega'_2. \end{cases}$$

On aura ainsi la relation entre $f(u, \omega'_1, \omega'_2)$ et $f(u, \mathrm{O}'_1, \mathrm{O}'_2)$.

Enfin, on réalisera la transformation particulière de degré n'

$$(4) \qquad \begin{cases} O_1 = O'_1, \\ O_2 = n'O'_2, \end{cases}$$

qui fournit la relation entre $f(u, O_1, O_2)$ et

$$f(u, O'_1, O'_2) = f\left(u, O_1, \frac{O_2}{n'}\right).$$

En rapprochant les résultats de ces opérations, on aura la relation cherchée entre $f(u, \omega_1, \omega_2)$ et $f(u, \omega'_1, \omega'_2)$.

Ainsi se trouve justifié tout ce que nous avions annoncé.

Le problème est particulièrement simple pour la fonction $\wp u$. Nous avons dit en effet qu'une transformation du premier degré ne change pas la valeur de cette fonction. On a donc

$$\wp(u, \Omega_1, \Omega_2) = \wp(u, O_1, O_2),$$
$$\wp(u, \omega'_1, \omega'_2) = \wp(u, O'_1, O'_2).$$

Nous établirons dans la suite que, si l'on divise une des périodes par un entier ν, la nouvelle fonction $\wp u$ est une fonction rationnelle R_ν de degré ν de l'ancienne. Par conséquent,

$$\wp(u, \Omega_1, \Omega_2) = \wp\left(u, \frac{\omega_1}{\theta}, \omega_2\right) = R_\theta\big[\wp(u, \omega_1, \omega_2)\big],$$
$$\wp(u, O'_1, O'_2) = \wp\left(u, O_1, \frac{O_2}{n'}\right) = R_{n'}\big[\wp(u, O_1, O_2)\big];$$

c'est-à-dire, en vertu des relations qui précèdent,

$$\wp(u, O_1, O_2) = R_\theta\big[\wp(u, \omega_1, \omega_2)\big],$$
$$\wp(u, \omega'_1, \omega'_2) = R_{n'}\big[\wp(u, O_1, O_2)\big];$$

d'où résulte manifestement que $\wp(u, \omega'_1, \omega'_2)$ est une *fonction rationnelle* du degré $n'\theta = n$ de $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$.

Nous avons donc réduit le problème général de la transformation de la fonction $\wp u$ au problème de la *division des périodes* de cette fonction, problème que la suite de la théorie nous enseignera à résoudre.

CHAPITRE III

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

8. Théorème. — *Une fonction elliptique entière se réduit à une constante.*

Car son module reste fini dans un parallélogramme des périodes et, à cause de la périodicité, dans tout le plan. Or une fonction analytique uniforme dont le module reste partout fini se réduit nécessairement à une constante.

9. Théorème. — *La somme des résidus d'une fonction elliptique $f(u)$ par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est égale à zéro.*

Car cette somme est, d'après un théorème général de Cauchy, égale à l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du$ prise dans le sens direct autour du parallélogramme. Or cette intégrale est nulle, car deux éléments différentiels $f(u)\,du$, qui correspondent à deux points homologues sur deux côtés opposés, sont égaux et de signe contraire.

10. *Ordre d'une fonction elliptique.* — L'*ordre* d'une fonction elliptique est le nombre des pôles qu'elle possède dans un parallélogramme des périodes, un pôle multiple comptant pour autant de pôles qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.

Cet ordre est au moins égal à 2. — Car si la fonction n'avait qu'un pôle simple, le résidu correspondant à ce pôle étant différent de zéro, la somme des résidus ne serait pas nulle.

11. Théorème. — *Si une fonction elliptique $f(u)$ est d'ordre n, l'équation $f(u) = c$, où c est une constante quelconque, a, dans le parallélogramme des périodes, n racines (égales ou inégales).*

Car les pôles de la fonction $f(u)-c$, étant les mêmes que ceux de $f(u)$, sont au nombre de n. D'autre part, si m désigne le nombre des racines de

l'équation

$$f(u) - c = 0,$$

la différence $m - n$ est égale, comme nous l'apprend un théorème de Cauchy, à l'intégrale

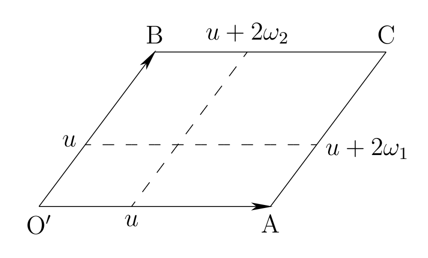
$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(u)}{f(u) - c}\, du$$

prise dans le sens direct autour du parallélogramme. La fonction $\dfrac{f'(u)}{f(u) - c}$ étant périodique comme $f(u)$, cette intégrale est nulle. Donc $m = n$, c. q. f. d.

12. Théorème. — *Dans un parallélogramme des périodes, la somme des zéros d'une fonction elliptique est égale à celle de ses pôles, augmentée d'une période convenable.*

Car la différence entre la somme $\beta_1 + \beta_2 + \dots$ de ces zéros et la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ de ces pôles est donnée (Cauchy) par l'intégrale

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{uf'(u)}{f(u)}\, du$$



prise dans le sens direct autour du parallélogramme.

Si pour un instant on désigne $\dfrac{uf'(u)}{f(u)}$ par $\mathrm{F}(u)$ et que dans l'intégrale $\int \mathrm{F}(u)\, du$ on groupe deux par deux les éléments correspondants sur les côtés opposés, on aura

$$\int \mathrm{F}(u)\, du = \int_{\mathrm{O'A}} \big[\mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(u + 2\omega_2)\big]\, du - \int_{\mathrm{O'B}} \big[\mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(u + 2\omega_1)\big]\, du.$$

Or

$$\mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(u+2\omega_2) = u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega_2)\,\frac{f'(u+2\omega_2)}{f(u+2\omega_2)} = -2\omega_2\,\frac{f'(u)}{f(u)},$$
$$\mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(u+2\omega_1) = u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega_1)\,\frac{f'(u+2\omega_1)}{f(u+2\omega_1)} = -2\omega_1\,\frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Il en résulte

$$\int \mathrm{F}(u)\,du = -2\omega_2 \int_{\mathrm{O}'}^{\mathrm{O}'+2\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du + 2\omega_1 \int_{\mathrm{O}'}^{\mathrm{O}'+2\omega_2} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Mais, $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ reprenant la même valeur aux deux limites $\mathrm{O}', \mathrm{O}'+2\omega_1$ (ou $\mathrm{O}', \mathrm{O}'+2\omega_2$), $\log f(u)$, qui représente l'intégrale $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$, doit ou bien avoir repris la même valeur ou s'être accrû d'un multiple de $2\pi i$. Par suite

$$\int \mathrm{F}(u)\,du = -2\omega_2 \,.\, 2m_2\pi i + 2\omega_1 \,.\, 2m_1\pi i.$$

Cette valeur de $\int \mathrm{F}(u)\,du$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int \frac{uf'(u)}{f(u)}\,du$, substituée dans la formule qui exprime la différence

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$$

donne finalement

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots) = 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2,$$

ce qui démontre notre proposition.

13. Théorème. — *Une fonction elliptique est déterminée à un facteur constant près par ses périodes, ses pôles et ses zéros donnés avec leur degré de multiplicité.*

Car si deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $\varphi(u)$ ont les mêmes périodes, les mêmes pôles et les mêmes zéros, leur quotient $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$, étant nécessairement une fonction elliptique entière, se réduit à une constante C. On a donc

$$f(u) = \mathrm{C}\varphi(u).$$

14. Théorème. — *Une fonction elliptique est déterminée à une constante additive près quand on donne ses périodes, ses pôles et le développement de sa partie infinie autour de chacun d'eux.*

Car si $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont deux fonctions elliptiques ayant mêmes périodes, mêmes pôles et même partie infinie autour de chaque pôle, la différence $f(u) - \varphi(u)$, qui est une fonction elliptique entière, doit se réduire à une constante C. On a donc

$$f(u) = \varphi(u) + \mathrm{C}.$$

Jusqu'ici nous avons admis l'existence des fonctions elliptiques. Il nous reste à prouver cette existence, et nous ne pouvons le faire qu'en construisant de pareilles fonctions.

DEUXIÈME PARTIE

LA FONCTION $\wp u$

CHAPITRE I

CONSTRUCTION ET PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\wp u$.

15. *Construction de $\wp u$.* — La plus simple de toutes les fonctions elliptiques a été réalisée par Weierstrass. Elle est du second ordre ; elle a un pôle double sans résidu à l'origine et par conséquent en tous les points

$$w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

$2\omega_1, 2\omega_2$ désignant les périodes données ; dans le voisinage du pôle w, sa partie infinie se réduit à $\dfrac{1}{(u-w)^2}$. Nous savons maintenant que ces conditions déterminent la fonction cherchée $\wp u$ à une constante additive près. On réalise cette fonction au moyen de la série à double entrée

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

où la sommation s'étend à tous les systèmes de valeurs entières attribuées à m_1 et à m_2, le seul système $m_1 = m_2 = 0$ excepté.

Les termes constants $\dfrac{1}{w^2}$ ont été retranchés des termes $\dfrac{1}{(u-w)^2}$ pour rendre la série convergente, comme nous allons le montrer.

Admettant provisoirement cette convergence, nous voyons que le développement admet les deux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, car le changement de u en $u + 2\omega_1$ ou $u + 2\omega_2$ n'a d'autre effet que d'en permuter les termes.

La série qui définit $\wp u$ est absolument et uniformément convergente dans toute région du plan qui ne contient aucun des points $w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. En effet le terme général peut être écrit

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2uw - u^2}{w^2(u-w)^2} = \frac{2u - \dfrac{u^2}{w}}{\left(1 - \dfrac{u}{w}\right)^2} \cdot \frac{1}{w^3}.$$

Le terme qui multiplie $\frac{1}{w^3}$ a un module fini en tous les points autres que les points w. Il suffit donc d'établir la convergence absolue de la série $\sum \frac{1}{w^3}$ ou plus généralement de

$$\sum \frac{1}{w^\lambda} = \sum \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^\lambda},$$

lorsque λ est un nombre réel plus grand que 2.

Or la série des modules des différents termes a pour terme général

$$\frac{1}{\left[(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2)^2 + (\beta_1 m_1 + \beta_2 m_2)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}},$$

α_1, α_2 désignant les parties réelles et β_1, β_2 les parties imaginaires de $2\omega_1, 2\omega_2$.

Celle-ci sera convergente en même temps que la série plus simple

$$\mathrm{S} = \sum \frac{1}{[m_1^2 + m_2^2]^{\frac{\lambda}{2}}},$$

car, si l'on pose $\frac{m_2}{m_1} = \mu$, le rapport des termes correspondants ne dépend que de μ et ce rapport

$$\left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2\mu)^2 + (\beta_1 + \beta_2\mu)^2}{1 + \mu^2}\right]^{\frac{\lambda}{2}}$$

ne devient jamais, quel que soit μ, ni nul ni infini.

Nous sommes donc ramenés à étudier la série double S. En laissant de côté les valeurs négatives de m_1, m_2, nous pouvons la considérer comme la somme de quatre autres : la première, simple, comprenant tous les termes où $m_1 = 0$; la deuxième, simple aussi, formée de tous les termes où $m_2 = 0$; la troisième, double, formée de tous les termes où $m_2 \geq m_1$;

la quatrième, double, formée de tous les termes où $m_1 \geq m_2$; en sorte que

$$\mathrm{S} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{m_1^\lambda} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{m_2^\lambda} + \sum_{m_1=1}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=m_1}^{m_2=\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}} + \sum_{m_2=1}^{m_2=\infty} \sum_{m_1=m_2}^{m_1=\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Par raison de symétrie la première et la seconde de ces quatre séries sont égales entre elles, la troisième et la quatrième aussi égales entre elles.

D'ailleurs la première série est, on le sait, convergente pour $\lambda > 1$.

Nous n'avons plus à étudier que la troisième série, qui est double. Occupons-nous d'abord de la série simple

$$\sum_{m_2=m_1}^{m_2=\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}},$$

où m_1 est fixe. Son terme général est inférieur à $\dfrac{1}{m_2^\lambda}$. Or la série dont le terme de rang $m_2 - m_1$ est $\dfrac{1}{m_2^\lambda}$ a une somme de même ordre que l'intégrale $\displaystyle\int_{m_1}^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ (règle de Cauchy). Comme λ doit être plus grand que 1, cette intégrale a pour valeur $\dfrac{1}{\lambda - 1} \dfrac{1}{m_1^{\lambda-1}}$. On peut donc écrire, K étant un nombre fini,

$$\sum_{m_2=m_1}^{m_2=\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^\lambda} < \mathrm{K} \frac{1}{m_1^{\lambda-1}}.$$

Il faut maintenant donner à m_1 toutes les valeurs entières de 1 à l'infini,

et faire la somme des quantités ainsi obtenues ; on aura

$$\sum_{m_1=1}^{m_1=\infty}\sum_{m_2=m_1}^{m_2=\infty}\frac{1}{(m_1^2+m_2^2)^\lambda} < \mathrm{K}\sum_{m_1=1}^{m_1=\infty}\frac{1}{m_1^{\lambda-1}}.$$

Mais la série qui figure au second membre converge pour $\lambda-1>1$, c'est-à-dire pour $\lambda>2$, c. q. f. d.

La convergence absolue de la série $\wp u$ en tout point u qui ne coïncide pas avec un des points w se trouve ainsi établie. La série est de plus uniformément convergente, car nous avons ramené la question de sa convergence à celle de la convergence de la série $\sum\frac{1}{w^3}$, laquelle a ses termes indépendants de u.

16. *Double périodicité de $\wp u$. — Parité. — Homogénéité. — Invariance dans toutes les transformations du premier degré.* — 1° Nous avons déjà mis en évidence la double périodicité de $\wp u$. Les deux périodes sont $2\omega_1, 2\omega_2$.

2° *La fonction $\wp u$ est paire.* Car, dans la série qui la représente, nous avons le droit d'écrire $-w$ au lieu de w, ce qui ne fait qu'échanger les termes deux à deux. Si alors nous changeons u en $-u$, nous obtenons

$$\wp(-u)=\frac{1}{(-u)^2}+\sum\left[\frac{1}{(-u+w)^2}-\frac{1}{(-w)^2}\right],$$

expression visiblement identique à $\wp u$.

3° Considérée comme fonction des trois quantités $u, 2\omega_1, 2\omega_2$, $\wp u$ est homogène et de degré -2.

4° Construisons deux fonctions $\wp u$: l'une $\wp(u,\omega_1,\omega_2)$ aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$; l'autre $\wp(u,\omega_1',\omega_2')$ aux périodes $2\omega_1', 2\omega_2'$ liées aux précédentes par les relations

$$2\omega_1' = a\cdot 2\omega_1 + b\cdot 2\omega_2,\qquad 2\omega_2' = c\cdot 2\omega_1 + d\cdot 2\omega_2,$$

où le déterminant $ad-bc$ est supposé égal à ± 1. Nous avons vu (1re partie, ch. I, 5) que le réseau des périodes $2\omega_1', 2\omega_2'$ a exactement les mêmes

sommets que celui des périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Or il est évident que la valeur de la série $\wp u$ en un point u du plan ne dépend que des sommets du réseau ; car si l'on change les périodes en conservant les sommets, les quantités w ne font que se permuter ; donc

$$\wp(u, \omega_1', \omega_2') = \wp(u, \omega_1, \omega_2).$$

Ainsi se trouve établi l'important résultat que nous avons annoncé (1re partie, ch. II, 6) : *$\wp u$ reste invariable pour toute transformation de degré* 1.

17. *Développement de $\wp u$ suivant les puissances de u.* — Les pôles de $\wp u$ sont les points

$$u = w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Ils sont doubles. Aux environs de $u = 0$, on a

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{1}{w^2}\left(1 - \frac{u}{w}\right)^{-2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \dots.$$

Faisons la somme pour toutes les valeurs de w ; remarquons que les puissances impaires de u doivent se détruire ; enfin, posons pour abréger

$$c_1 = 3\sum\frac{1}{w^4}, \qquad c_2 = 5\sum\frac{1}{w^6}, \qquad \dots;$$

nous obtiendrons l'important développement

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots$$

valable pour tout point u compris dans tout cercle ayant l'origine pour centre et un rayon moindre que la distance de ce centre au pôle le plus voisin.

Observons que ce développement manque de terme constant. Dans le voisinage d'un pôle quelconque w, le développement de $\wp u$ est

$$\wp u = \frac{1}{(u-w)^2} + c_1(u-w)^2 + c_2(u-w)^4 + \dots.$$

Cette nouvelle forme donnée à la fonction $\wp u$ montre immédiatement que c'est une fonction analytique.

18. *Équation algébrique entre $\wp u$ et sa dérivée.* — Nous avons

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots,$$
$$\wp' u = \frac{-2}{u^3} + 2c_1 u + 4c_2 u^3 + \dots.$$

On voit que la fonction elliptique

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u = -20c_1 \frac{1}{u^2} - 28c_2 + \dots$$

a un pôle double, sans résidu, à l'origine ; elle ne peut d'ailleurs en avoir d'autre dans le parallélogramme des périodes qui contient l'origine. Par conséquent $\wp'^2 u - 4\wp^3 u + 20c_1 \wp u$ est une fonction entière, et comme c'est une fonction elliptique, elle se réduit à une constante $-28c_2$ (qu'on obtient en y faisant $u = 0$). Finalement on a

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u + 20c_1 \wp u + 28c_2 = 0.$$

Telle est l'équation algébrique qui lie $\wp u$ à sa dérivée, et à laquelle on donne une forme plus commode pour les calculs, en posant

$$g_2 = 20c_1 = 60 \sum \frac{1}{w^4},$$
$$g_3 = 28c_2 = 140 \sum \frac{1}{w^6},$$

ce qui permet d'écrire

$$\wp'^2_u = 4\wp^3_u - g_2 \wp u - g_3.$$

Tout ce qui va suivre nous montrera l'importance de cette relation.

19. *Calcul des coefficients du développement de $\wp u$.* — La différentiation par rapport à u des deux membres de l'équation précédente donne, après suppression du facteur $2\wp' u$,

$$\wp''_u = 6\wp - \frac{1}{2}\, g_2.$$

Si l'on substitue dans cette dernière relation le développement

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots,$$

l'identification des termes en u^{2n-2} donnera

$$c_n = \frac{6}{n(2n-1)-6}\,(c_1 c_{n-2} + c_2 c_{n-3} + \dots),$$

le dernier terme entre parenthèses étant $c_{\frac{n}{2}-1} c_{\frac{n}{2}}$ ou $\frac{1}{2} c^2_{\frac{n-1}{2}}$ suivant que n est pair ou impair. Cette formule récurrente permet d'exprimer $c_3, c_4, \dots$ par des polynômes entiers en c_1, c_2.

Tous les coefficients du développement de $\wp u$ sont donc des polynômes entiers en g_2, g_3.

20. *Les trois racines e_1, e_2, e_3.* — Une raison de symétrie nous amène à introduire une troisième période $2\omega_3$ liée aux deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Posons

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3.$$

Ces trois nombres e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation du 3e degré

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0.$$

Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'ils annulent $\wp' u$. Or $\wp' u$ étant doublement périodique et impaire, puisque $\wp u$ est paire, on aura par exemple

$$\wp'\omega_1 = \wp'(\omega_1 - 2\omega_1) = \wp'(-\omega_1) = -\wp'\omega_1 = 0,$$

c. q. f. d.

Les trois racines e_1, e_2, e_3 sont distinctes, si, comme nous le supposons, ω_1, ω_2 et par suite ω_3 ne sont pas des périodes. Car si e_3 par exemple était égal à e_1, on aurait $\wp\omega_3 = \wp\omega_1$, d'où

$$\omega_3 = \pm\omega_1 + \text{période} \qquad \text{ou} \qquad \omega_3 \mp \omega_1 = \text{période},$$

ce qui n'est pas, car $\omega_3 + \omega_1 = -\omega_2$, et $\omega_3 - \omega_1 = -2\omega_1 - \omega_2$; or $-\omega_2$ et $-2\omega_1 - \omega_2$ ne sont ni l'une ni l'autre des périodes.

Les quantités e_1, e_2, e_3, d'après les relations qui les définissent

$$\wp\omega_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \sum \left[\frac{1}{(\omega_1 - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \quad \wp\omega_2 = \dots, \quad \wp\omega_3 = \dots,$$

sont homogènes et du degré -2 par rapport aux périodes.

Elles satisfont aux relations

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_3e_2 + e_3e_1 = -\frac{1}{4}\, g_2, \quad e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}\, g_3.$$

21. *Invariants de $\wp u$.* — Lorsqu'on change les périodes en conservant les sommets du réseau, les coefficients g_2, g_3, d'après leur définition (ci-dessus, 18), conservent leur valeur. Ce sont des *invariants* du réseau dans toute transformation du premier degré.

Deux autres invariants sont à considérer :

1° Le discriminant

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Il n'est jamais nul puisque les racines e_1, e_2, e_3 sont distinctes. Il est d'ordre -12 par rapport aux périodes ;

2° L'invariant absolu

$$\mathrm{J} = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Il est d'ordre zéro, et par suite il ne dépend que du rapport $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ des périodes. Il reste invariable si l'on change τ en $\dfrac{a + b\tau}{c + d\tau}$ $(ad - bc = \pm 1)$.

CHAPITRE II

LA FONCTION $\wp u$ DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

22. *Position du problème.* — Nous avons vu que la fonction $\wp u$ satisfait à une équation différentielle

$$\left(\frac{d\wp}{du}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

dont les coefficients constants g_2, g_3, qui vérifient l'inégalité

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0,$$

peuvent être calculés au moyen des périodes $2\omega_1, 2\omega_2$.

Inversement, donnons-nous *a priori* l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3.$$

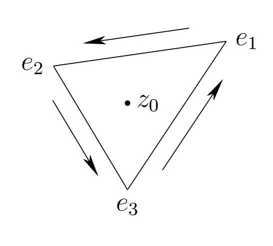
Nous allons montrer qu'elle admet pour intégrale particulière une fonction $\wp u$ dont nous déterminerons une période en fonction de g_2, g_3.

Figurons dans le plan de la variable complexe z les trois racines e_1, e_2, e_3 de l'équation

$$\mathrm{Z} = 4z^3 - g_2z - g_3 = 0.$$

Elles sont distinctes, car nous supposons

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$



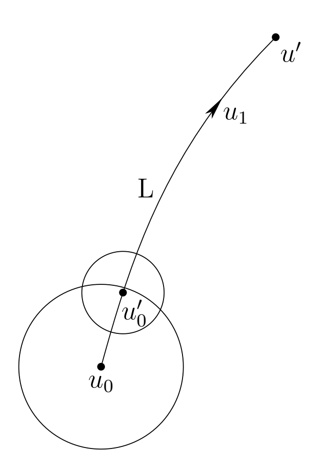
Nous les avons numérotées dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour du triangle $e_1e_2e_3$.

Partons d'un point quelconque z_0. En ce point le radical a deux valeurs égales et de signe contraire $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$ et $-\sqrt{\mathrm{Z}_0}$.

D'après le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles, il existe une fonction analytique z de u qui satisfait à l'équation

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{\mathrm{Z}}$$

et qui pour $u = u_0$ se réduit à z_0, le radical $\sqrt{\mathrm{Z}}$ prenant en même temps la détermination $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$ par exemple (u_0 est donné arbitrairement).



Si l'on marque le point u_0 dans le plan de la variable complexe u, la fonction z de u sera uniforme et continue dans un cercle décrit du centre u_0 avec un rayon ρ_0 que la théorie enseigne à calculer.

On peut déterminer de proche en proche la valeur que prendra cette fonction z en un point quelconque u' joint au point u_0 par un chemin L. Il suffit de calculer la valeur z'_0 que prend z en un point u'_0 situé à la fois sur L et dans le cercle de rayon ρ_0. Le théorème fondamental que nous venons de rappeler prouve l'existence d'une fonction z se réduisant à z'_0 pour $u = u'_0$, uniforme et continue dans un cercle de centre u'_0 et de rayon ρ'_0. Il est clair qu'en procédant ainsi de proche en proche, on arrivera jusqu'au point u' avec une valeur bien déterminée z' de la fonction.

Le raisonnement tomberait en défaut si les rayons $\rho_0, \rho'_0, \ldots$ tendaient vers zéro, auquel cas on aboutirait à un point limite u_1 situé sur le chemin L entre u_0 et u', et qu'on ne pourrait plus dépasser.

Mais la théorie nous renseigne sur la grandeur du rayon ρ_0 du cercle de centre u_0 où l'on peut affirmer l'existence et l'uniformité de l'intégrale d'une équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = f(u, z)$$

dont le second membre est une fonction uniforme et continue de z, u dans le voisinage de $u = u_0$, $z = z_0$. Ce rayon n'est très petit que si le module de $f(u, z)$ est très grand dans ce voisinage et que si les valeurs u, z critiques pour $f(u, z)$ sont très rapprochées de u_0, z_0.

Or, dans le cas actuel, $f(u, z) = \sqrt{\mathrm{Z}}$ ne peut évidemment tendre vers l'infini que si z y tend lui-même. Les points u_1 où le prolongement de la fonction z pourrait être arrêté sont donc ceux où z devient infini et ceux où z prend une des valeurs e_1, e_2, e_3, critiques pour $\sqrt{\mathrm{Z}}$.

Nous allons prouver : 1° que les premiers sont isolés (on pourra donc toujours les éviter) ; 2° que les derniers ne sont pas des points critiques pour z. Rien n'empêchera donc de prolonger la fonction dans tout le plan des u.

23. *La fonction z de u est uniforme et fractionnaire.* — Supposons donc que, pour $u = u_1$, z devienne infini. Posons $z = \dfrac{1}{t^2}$; l'équation différentielle devient

$$-\frac{2\,dt}{du} = \sqrt{4 - g_2 t^4 - g_3 t^6}.$$

Le radical ne s'annule pas pour $t = 0$; la détermination que l'on considère est donc une fonction de t uniforme et continue dans le voisinage de $t = 0$. Par conséquent l'équation différentielle ci-dessus définit une fonction t de u elle-même uniforme et continue dans un cercle de rayon fini décrit du point u_1 comme centre. Or, d'après un théorème connu, la fonction analytique t ne peut reprendre dans ce cercle une infinité de fois la valeur 0, c'est-à-dire que z n'y peut prendre qu'un nombre limité de fois une valeur infinie. Les infinis de z sont donc isolés dans le plan des u.

Nous allons prouver que ce sont des pôles.

Pour cela, développons en série le second membre de l'équation précédente ; il viendra

$$du = \pm \left(1 - \frac{g_2 t^4 + g_3 t^6}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \pm \left(1 + \frac{g_2}{8}\, t^4 + \frac{g_3}{8}\, t^6 + \dots\right) dt;$$

d'où, en intégrant et tenant compte de ce que t doit être nul pour $u = u_1$,

$$u - u_1 = \pm t \left(1 + \frac{g_2}{40}\, t^4 + \frac{g_3}{56}\, t^6 + \dots\right)$$

et, en résolvant par rapport à t,

$$t = \pm(u - u_1) \left[1 - \frac{g_2}{40}\,(u - u_1)^4 + \dots\right];$$

d'où

$$z = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{(u - u_1)^2} + \frac{g_2}{20}\,(u - u_1)^2 + \dots.$$

Ainsi z est uniforme aux environs du point u_1, et ce point u_1 *est un pôle.*

Reste à savoir si les points critiques e_1, e_2, e_3 de $\sqrt{\mathrm{Z}}$ dans le plan des z correspondent à des points u_1, u_2, u_3 du plan des u qui soient critiques pour la fonction z.

Posons $z = e_1 + t^2$. L'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{\mathrm{Z}} = \sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$$

se transforme en

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)}.$$

La valeur $t = 0$ n'étant pas un point critique pour le nouveau radical, u_1 sera un point ordinaire pour la fonction t de u et par conséquent pour $z = e_1 + t^2$.

De tout ceci résulte que z *est une fonction analytique uniforme et fractionnaire de* u.

24. *La fonction z de u est doublement périodique.* — A une même valeur z' de z l'équation différentielle, qu'on peut écrire

$$du = \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

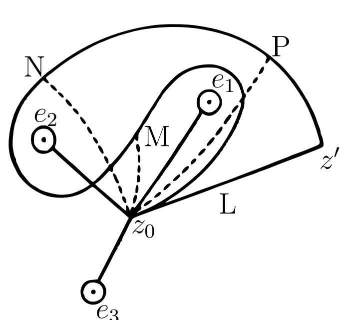
fait correspondre une infinité de valeurs de u. Cherchons-les.

L'équation intégrée donne

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

le signe de $\sqrt{\mathrm{Z}}$ étant déterminé par la condition que, pour $z = z_0$, $\sqrt{\mathrm{Z}}$ se réduise à $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$.

Il faut chercher les diverses valeurs que peut prendre cette intégrale lorsqu'on fait varier le fil d'intégration suivi de z_0 à z'. Menons une ligne déterminée L entre z_0 et z'. Puis joignons z_0 aux points e_1, e_2, e_3 par des *lacets* $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ composés chacun d'une droite, d'un petit cercle et de la même droite parcourue en sens inverse.



Tout chemin z_0MNPz' amènera la même valeur de u que le chemin déterminé L *précédé d'un certain nombre de lacets.*

Pour le prouver, observons que nous pouvons adjoindre au chemin z_0MNPz' les lignes (pointillées) z_0M, z_0N, z_0P à condition de les parcourir deux fois en sens inverse, et sans interposer d'autre trajet entre ces deux parcours, qui évidemment donneront une valeur nulle pour l'intégrale $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}$.

Rappelons-nous d'autre part que l'intégrale d'une fonction analytique $f(z)$ a même valeur le long de deux chemins ayant même point

de départ et même point d'arrivée, ne passant ni l'un ni l'autre par des points critiques de $f(z)$, et dont le second peut être obtenu en déformant le premier sans jamais le faire passer par aucun de ces points critiques. Deux pareils chemins sont dits *équivalents.*

Cela posé, le chemin $z_0\text{MNP}z'$ peut manifestement être remplacé par ces trois-ci parcourus consécutivement :

$$\overset{\dots}{z_0\text{M}}, \text{MN}, \overset{\dots}{\text{N}z_0}; \qquad \overset{\dots}{z_0\text{N}}, \text{NP}, \overset{\dots}{\text{P}z_0}; \qquad \overset{\dots}{z_0\text{P}}, \text{P}z'.$$

Or d'après la définition des chemins équivalents, il est facile de voir que le premier équivaut à un lacet L_2, le second à un lacet L_1, le troisième au chemin L.

L'intégrale suivant le lacet L_1 se compose des intégrales suivant la droite z_0e_1, suivant le petit cercle de centre e_1, et suivant la ligne de retour e_1z_0.

Or, lorsque le point z a fait une circulation complète autour de e_1, le radical $\sqrt{\text{Z}}$ a simplement changé de signe. Comme dz change de signe également dans le retour, le quotient $\dfrac{dz}{\sqrt{\text{Z}}}$ reprend exactement la même valeur quand z repasse par les mêmes points ; il en résulte que

$$\int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}} = \int_{e_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}}.$$

Quant à l'intégrale le long du petit cercle, elle est nulle ; car cette intégrale $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}}$ a son module du même ordre de grandeur que celui de $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z - e_1}}$, lequel est inférieur à

$$\int \frac{\text{mod.}\, dz}{\text{mod.}\, \sqrt{z - e_1}} = \int \frac{ds}{\sqrt{\rho}},$$

ρ désignant le rayon de la petite circonférence et ds l'élément d'arc. Or

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int ds = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\, 2\pi\rho = 2\pi\sqrt{\rho},$$

quantité qui tend vers zéro en même temps que ρ.

De tout ceci résulte que l'intégrale suivant le lacet L_1 se réduit à $2\displaystyle\int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}$. Posons

$$\mathrm{A}_1 = \int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad \mathrm{A}_2 = \int_{z_0}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad \mathrm{A}_3 = \int_{z_0}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

le signe du radical $\sqrt{\mathrm{Z}}$ étant déterminé par l'obligation imposée à ce radical de se réduire à $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$ pour $z = z_0$; et remarquons que, lorsque le point z revient en z_0, le radical ne reprend pas la valeur qu'il avait au moment du départ, mais une valeur égale et de signe contraire. De sorte que l'intégrale prise suivant le lacet L_1 est $2\mathrm{A}_1$ ou $-2\mathrm{A}_1$ suivant qu'on a décrit avant celui-là un nombre pair ou un nombre impair d'autres lacets.

Enfin, la valeur de l'intégrale le long du chemin L étant désignée par I,

$$\mathrm{I} = \int_{z_0}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

lorsque la valeur initiale du radical est $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$, cette intégrale aura pour valeur $+\mathrm{I}$ ou $-\mathrm{I}$ suivant que L aura été précédé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de lacets.

Toutes les valeurs de u répondant à une même valeur de z sont donc données par la formule

$$u = u_0 + 2n_1\mathrm{A}_1 + 2n_2\mathrm{A}_2 + 2n_3\mathrm{A}_3 + (-1)^{n_1+n_2+n_3}\mathrm{I},$$

n_1, n_2, n_3 étant des entiers positifs ou négatifs dont la somme est égale à 0 ou à 1 suivant que le nombre des lacets est pair ou impair ; car tout lacet qui amène l'intégrale $+2\mathrm{A}_i$ (i étant un des nombres $1, 2, 3$) est nécessairement suivi d'un autre amenant l'intégrale $-2\mathrm{A}_j$ ($j = 1, 2$ ou 3).

Posons maintenant

$$A_3 - A_2 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1,$$
$$A_1 - A_3 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_2,$$
$$A_2 - A_1 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_3,$$

et remplaçons dans la formule précédente A_1 par sa valeur $A_3 + \omega_2$ et A_2 par $A_3 - \omega_1$; elle deviendra

$$u = u_0 + 2n_1\omega_2 - 2n_2\omega_1 + (n_1 + n_2 + n_3)2A_3 + (-1)^{n_1+n_2+n_3}I,$$

et suivant que $n_1 + n_2 + n_3$ est égal à 0 ou à 1,

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + I + u_0$$
$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + 2A_3 - I + u_0.$$

De là résulte que z est une fonction doublement périodique de u aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ déterminées en fonction des constantes g_2, g_3 (dont e_1, e_2, e_3 sont des fonctions) par les intégrales définies ci-dessus.

Comme nous avons vu que z est une fonction analytique, uniforme et fractionnaire, c'est une fonction elliptique.

Son ordre est 2 ; car il n'y a dans chaque parallélogramme des périodes que deux valeurs de l'argument qui fassent acquérir à la fonction z une même valeur. C'est ce que montrent les deux formules ci-dessus qui ne donnent pour u que deux valeurs *distinctes*, $I + u_0$ et $2A_3 - I + u_0$.

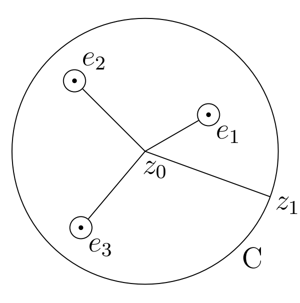
25. *Pôles de z ; z est une fonction $\wp u$.* — La fonction elliptique z étant du second ordre et ses pôles étant doubles, il n'y en aura qu'un dans chaque parallélogramme des périodes. — Cherchons où ils sont situés.

La valeur u_1 d'un pôle est donnée par la formule

$$u_1 = u_0 + \int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Évaluons cette intégrale, que nous supposons prise le long d'une ligne $z_0 z_1$ aboutissant en un point z_1 d'un cercle C décrit de z_0 comme centre avec un cercle de rayon infini.

La fonction analytique $\sqrt{\mathrm{Z}}$, dont la valeur au point z_0 est bien déterminée et égale à $+\sqrt{\mathrm{Z}_0}$, est visiblement uniforme et continue dans la région du plan des z bornée par le cercle C, par la ligne $z_0 z_1$ et par les trois lacets $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$. Son intégrale suivant ce contour est nulle. Cette intégrale est la somme de six autres, prises : 1° suivant $z_0 z_1$; 2° suivant C dans le sens rétrograde ; 3° suivant $z_1 z_0$; 4° suivant L_1 (c'est le seul lacet qu'on puisse suivre dans la disposition de la figure, sans franchir un autre lacet ou la coupure $z_0 z_1$) ; 5° suivant L_2 ; 6° suivant L_3.



Quand le point z, après avoir décrit la circonférence C, est revenu en z_1, le radical

$$\sqrt{\mathrm{Z}} = \sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$$

a changé de signe comme le ferait évidemment le radical plus simple $\sqrt{z^3}$ qui est la partie principale de $\sqrt{\mathrm{Z}}$ pour les grandes valeurs de z. Il en résulte que

$$\int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

d'où

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}} + \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = 2\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}.$$

Lorsque z est revenu en z_0, le radical a pris la valeur $-\sqrt{\mathrm{Z}_0}$; par suite le lacet L_1 amènera la valeur $-2\mathrm{A}_1$ de l'intégrale ; le lacet L_2 qui vient ensuite, la valeur $+2\mathrm{A}_2$; le lacet suivant L_3 la valeur $-2\mathrm{A}_3$. On aura donc

$$2\int_{z_0}^{z_1} + \int_{\mathrm{C}} -2\mathrm{A}_1 + 2\mathrm{A}_2 - 2\mathrm{A}_3 = 0.$$

Mais l'intégrale suivant le cercle C est rigoureusement nulle. Car elle a une valeur fixe quel que soit le rayon R de ce cercle, et elle est du même ordre que l'intégrale plus simple $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^3}}$, dont le module (si ds désigne un élément de la circonférence) est plus petit que

$$\int_C \frac{\text{mod.}\, dz}{\text{mod.}\, \sqrt{z^3}} = \int \frac{ds}{\mathrm{R}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{R}^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi\mathrm{R} = \frac{2\pi}{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}},$$

quantité aussi petite qu'on veut.

L'équation ci-dessus, où l'on fait $\int_C = 0$ et où l'on remplace $\int_{z_0}^{z_1}$ c'est-à-dire $\int_{z_0}^{\infty}$ par sa valeur $u_1 - u_0$, donne pour valeur du pôle u_1

$$u_1 = u_0 + \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3.$$

Tous les pôles de z sont compris dans la formule générale

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + u_0 + \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3.$$

Maintenant donnons à la constante d'intégration u_0 la valeur particulière

$$u_0 = -\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3;$$

les pôles seront les points

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Conclusion. — z ne sera autre chose que la fonction $\wp u$ construite sur les deux périodes

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

car les deux fonctions elliptiques z et $\wp u$ ont mêmes périodes, mêmes pôles, même partie infinie $\frac{1}{(u-u_1)^2}$ autour de chacun de ces pôles, et

de plus même terme constant, savoir zéro, de leur développement dans le voisinage d'un pôle u_1, puisque nous avons trouvé (23)

$$z = \frac{1}{(u - u_1)^2} + \frac{g_2}{20}(u - u_1)^2 + \dots.$$

Remarque. — Quand le triangle e_1, e_2, e_3 devient infiniment aplati, c'est-à-dire quand les trois points e_1, e_2, e_3 sont en ligne droite, le calcul des périodes ne présente aucune difficulté particulière. Car si, pour fixer les idées, nous supposons e_3 situé entre e_1 et e_2, l'élément différentiel des deux intégrales qui représentent ω_1 et ω_2 ne devient pas infini entre les deux limites.

Il n'en est pas de même pour l'intégrale qui exprime ω_3 ; mais il est inutile de discuter cette intégrale pour savoir comment la calculer (ce qui d'ailleurs serait facile) ; car nous savons *a priori* que ω_3 est égale à $-(\omega_1 + \omega_2)$.

CHAPITRE III

LES FONCTIONS ζu ET σu.

La théorie des fonctions elliptiques est facilitée par l'adjonction à la fonction $\wp u$ de deux autres fonctions que Weierstrass a nommées ζu et σu et qui sont liées d'une façon très simple à $\wp u$. Au reste ζu et σu ne sont pas des fonctions elliptiques, mais elles se rapprochent beaucoup de ces fonctions par leurs propriétés.

26. *Définition de ζu.* — Si l'on intégrait terme à terme la série

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

sans ajouter de constante, on obtiendrait un développement dont la convergence serait incertaine, car son terme général $\dfrac{-1}{u-w} - \dfrac{u}{w^2}$ est de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{w^2}$, et la série des modules de $\dfrac{1}{w^2}$ est divergente. Mais il est facile de rendre ce développement convergent : il suffit d'ajouter à chacun de ses termes la constante $-\dfrac{1}{w}$. Car le terme général

$$-\frac{1}{u-w} - \frac{u}{w^2} - \frac{1}{w} = -\frac{u^2}{w^2(u-w)} = \frac{u^2}{1-\dfrac{u}{w}} \cdot \frac{1}{w^3}$$

est de l'ordre de $\dfrac{1}{w^3}$ (voir 2e partie, ch. I, 15).

La série ainsi obtenue est absolument et uniformément convergente en toute région du plan qui ne contient aucun des points

$$w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

C'est cette série changée de signe qu'on appelle ζu. Ainsi

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right)$$

et

$$\zeta'(u) = -\wp u.$$

La fonction ζu, ayant pour dérivée une fonction paire, *est une fonction impaire.*

Elle est homogène de degré -1 par rapport aux trois lettres u, ω_1, ω_2.

Elle reste invariable lorsqu'on change les périodes sans changer les sommets du réseau, c'est-à-dire dans toute transformation du premier degré.

Elle a pour pôles les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces pôles sont simples et les résidus correspondants sont égaux à 1.

27. *Développement de ζu suivant les puissances de u.* — Du développement (17)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots$$

on déduit en intégrant, changeant de signe, et remarquant que la différence $\zeta u - \dfrac{1}{u}$ s'annule pour $u = 0$,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - c_1 \frac{u^3}{3} - c_2 \frac{u^5}{5} - \dots.$$

28. *Addition d'une période à l'argument de ζu.* — De la relation

$$\wp(u + 2\omega_1) = \wp(u),$$

on tire, en intégrant et changeant le signe des deux membres,

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1.$$

Pour déterminer la constante η_1, faisons $u = -\omega_1$. Observons que $\zeta(u)$ est une fonction impaire et que par suite $\zeta(-\omega_1) = -\zeta(\omega_1)$. Nous en concluons

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1).$$

Le même raisonnement et le même calcul s'appliqueront à $\zeta(u+2\omega_2)$. Nous aurons donc

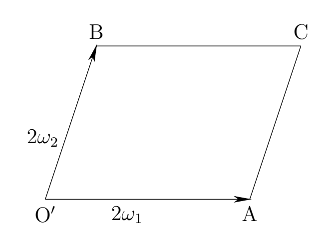
$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1,$$
$$\zeta(u+2\omega_2) = \zeta(u) + 2\eta_2,$$

avec

$$\eta_1 = \zeta\omega_1, \qquad \eta_2 = \zeta\omega_2.$$

On voit que la fonction $\zeta(u)$ n'est pas doublement périodique, mais se reproduit augmentée d'une constante par l'addition d'une période (de $\wp u$) à son argument.

29. *Relation entre les quatre constantes* ω_1, ω_2, η_1, η_2. — Les quatre constantes $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ sont liées par une relation dont nous apercevrons la grande importance dans la théorie des fonctions θ de Jacobi. On obtient cette relation en calculant l'intégrale $\int \zeta u\, du$ autour du parallélogramme des périodes O′ABC.



L'intégration suivant les deux côtés opposés O′A, BC donne

$$\int_{\mathrm{O'A}} \zeta u\, du + \int_{\mathrm{CB}} \zeta u\, du = \int_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{O'}+2\omega_1} \zeta(u)\, du - \int_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{O'}+2\omega_1} \zeta(u+2\omega_2)\, du$$
$$= \int_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{O'}+2\omega_1} \big[\zeta(u) - \zeta(u+2\omega_2)\big]\, du = \int_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{O'}+2\omega_1} -2\eta_2\, du = -4\eta_2\omega_1.$$

Les deux côtés AC, O′B donnent $+4\omega_2\eta_1$.

L'intégrale cherchée est donc

$$4(\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2).$$

Mais d'autre part cette intégrale est égale au produit de $2\pi i$ par la somme des résidus de la fonction ζu relatifs aux pôles contenus dans ce

parallélogramme, si l'on suppose que le sens du parcours O′ACB est le sens direct. Or, il n'y a qu'un pôle, de résidu +1. On a donc

$$2(\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2) = \pi i.$$

C'est la relation cherchée.

L'hypothèse faite sur le sens du parcours implique, comme nous l'avons vu (1[re] partie, ch. I, 4), que le rapport $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ des périodes ait sa partie imaginaire positive. On peut toujours supposer qu'il en est ainsi, car, dans le cas contraire, on prendrait pour périodes $2\omega_1$ et $-2\omega_2$, ce qui ne change pas les sommets du réseau et par suite n'altère pas la fonction ζu.

30. *La fonction σu.* — Intégrons la série

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

et, pour rendre convergente la série obtenue, ajoutons à chacun de ses termes la constante $-\log w$. Le terme général aura pour expression

$$\begin{aligned}\log(w-u) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} - \log w &= \log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}\\ &= \left(-\frac{u}{w} - \frac{u^2}{2w^2} - \frac{u^3}{3w^3} - \dots\right) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} = -\frac{u^3}{3w^3} - \dots\end{aligned}$$

Il est de l'ordre de $\dfrac{1}{w^3}$, et par conséquent la convergence de la série est assurée.

La fonction qu'on obtient ainsi et qu'on peut écrire

$$\log u + \sum \log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \sum \log e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}}$$
$$= \log\left[u \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}}\right]$$

n'est pas uniforme; mais uniforme est la fonction qui figure sous le signe log. C'est cette dernière qu'on appelle σu. On a donc

$$\sigma u = u \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}}$$

et

$$\frac{d}{du} \log \sigma u = \zeta u.$$

31. *Propriétés de σu. — Développement suivant les puissances de u.* — La fonction σu est évidemment entière et ses zéros sont les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces zéros sont simples. Pour u infiniment petit, la valeur principale de σu est égale à u.

Considérée comme fonction des trois lettres u, $2\omega_1$, $2\omega_2$, σu est homogène de degré 1.

Elle reste invariable pour toute transformation du premier degré.

C'est une fonction impaire de u. Car on a le droit, dans l'expression de σu, d'écrire $-w$ au lieu de w, ce qui ne fait qu'échanger les termes deux à deux. Si alors on change u en $-u$, on voit que la fonction s'est reproduite, mais changée de signe.

Enfin si l'on intègre le développement (27)

$$\zeta u = \frac{1}{u} - c_1 \frac{u^3}{3} - c_2 \frac{u^5}{5} - \dots$$

et qu'on remarque que, pour $u = 0$, $\log \sigma u - \log u$ s'annule, il vient

$$\log \sigma u = \log u - c_1 \frac{u^4}{3 . 4} - c_2 \frac{u^6}{5 . 6} - \dots$$

$$\sigma u = u . e^{-c_1 \frac{u^4}{3.4} - c_2 \frac{u^6}{5.6} - \dots}$$

$$= u(1 + d_1 u^4 + d_2 u^6 + \dots).$$

32. *Addition d'une période à l'argument de σu.* — Intégrons l'équation

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1;$$

on trouve

$$\log \sigma(u + 2\omega_1) = \log \sigma u + 2\eta_1 u + \text{const.},$$
$$\sigma(u + 2\omega_1) = \mathrm{C}e^{2\eta_1 u}\, \sigma u.$$

Pour déterminer la constante C, faisons $u = -\omega_1$, et remarquons que, σu étant une fonction impaire, nous aurons $\sigma(-\omega_1) = -\sigma\omega_1$; il viendra

$$\mathrm{C} = -e^{2\eta_1\omega_1}.$$

Le même calcul se faisant pour la période $2\omega_2$, nous aurons

$$\sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\, \sigma u,$$
$$\sigma(u + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\, \sigma u.$$

Ces formules montrent que σu n'est pas une fonction elliptique, ce que nous montrait d'ailleurs *a priori* le fait que σu est une fonction entière ; σu est une *fonction doublement périodique de troisième espèce.* M. Hermite a appelé ainsi les fonctions analytiques uniformes qui, lorsqu'on ajoute une *période* à leur argument, se reproduisent multipliées par un facteur exponentiel dont l'exposant est une fonction linéaire de l'argument. Quand ce facteur se réduit à une constante, on a affaire à une *fonction doublement périodique de deuxième espèce.*

33. *Rappel des formules fondamentales relatives à $\wp u$, ζu, σu.* — Si l'on pose $w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, on a

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right];$$
$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right);$$
$$\sigma u = u \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}};$$

$$\zeta' u = -\wp u; \qquad \frac{d}{du} \log \sigma u = \zeta u;$$
$$\wp(u + 2\omega_1) = \wp(u + 2\omega_2) = \wp u;$$
$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1, \qquad \zeta(u + 2\omega_2) = \zeta u + 2\eta_2,$$
$$\sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma u, \qquad \sigma(u + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\,\sigma u.$$

Rappelons enfin les formules

$$\eta_1 = \zeta\omega_1, \qquad \eta_2 = \zeta\omega_2, \qquad 2(\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2) = \pi i.$$

CHAPITRE IV

EXPRESSION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES PAR LES FONCTIONS σ, ζ, $\wp$.

Toute fonction elliptique $f(u)$ aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ peut être exprimée d'une manière très simple soit par des fonctions σ, soit par des fonctions ζ, soit par une fonction $\wp$ ayant les mêmes périodes.

34. *Expression par un quotient de fonctions σ.* — Il faut avoir déterminé les zéros $a_1, a_2, \dots, a_n$ et les pôles $b_1, b_2, \dots, b_n$ de $f(u)$ situés dans un parallélogramme des périodes [1]. On sait que la somme des zéros ne diffère de la somme des pôles que par la somme de multiples des deux périodes :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Si du parallélogramme considéré on se transporte dans celui dont un sommet diffère du sommet homologue de celui-là précisément de $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, on y trouvera un pôle b'_n, par exemple, homologue de b_n et tel que

$$b'_n = b_n + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

en sorte que la relation précédente prend la forme plus simple (où b_n a été récrit pour b'_n, par raison de symétrie)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Cela posé, la fonction

$$\frac{\sigma(u - a_1) \dots \sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1) \dots \sigma(u - b_n)}$$

a les mêmes zéros et les mêmes pôles que $f(u)$.

---

[1] Ou, plus généralement, les zéros distincts et les pôles distincts, c'est-à-dire tels que deux d'entre eux aient une différence non égale à une période $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$.

C'est d'ailleurs une fonction elliptique aux mêmes périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Car si l'on y change u en $u + 2\omega_1$, par exemple, elle se reproduit (32) multipliée par

$$\frac{(-1)^n e^{2\eta_1(u-a_1+\omega_1)} \dots e^{2\eta_1(u-a_n+\omega_1)}}{(-1)^n e^{2\eta_1(u-b_1+\omega_1)} \dots e^{2\eta_1(u-b_n+\omega_1)}} = \frac{e^{2\eta_1[n(u+\omega_1)-(a_1+\cdots+a_n)]}}{e^{2\eta_1[n(u+\omega_1)-(b_1+\cdots+b_n)]}} = 1.$$

On aura donc

$$f(u) = \mathrm{C}\frac{\sigma(u-a_1)\dots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\dots\sigma(u-b_n)}.$$

Pour déterminer le facteur constant C, on donnera à u une valeur particulière pour laquelle on exprimera que les deux membres sont égaux (ou ont même valeur principale, s'ils sont nuls ou infinis).

Si quelques zéros ou quelques pôles sont multiples, on fera dans cette formule $a_1 = a_2 = \dots$ ou $b_1 = b_2 = \dots$.

35. *Expression par ζ et ses dérivées.* — Ce procédé exige que l'on connaisse les pôles *distincts* $a, b, \dots$ de $f(u)$, leurs degrés respectifs de multiplicité $\alpha, \beta, \dots$ et le développement de la partie infinie de $f(u)$ autour de chacun d'eux

$$\frac{\mathrm{A}_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_1}{u-a}, \qquad \frac{\mathrm{B}_\beta}{(u-b)^\beta} + \cdots + \frac{\mathrm{B}_1}{u-b}, \qquad \dots.$$

Nous allons montrer qu'on aura

$$\begin{aligned} f(u) = \mathrm{A}_1\zeta(u-a) - \mathrm{A}_2\zeta'(u-a) + \cdots + \frac{(-1)^{\alpha-1}\mathrm{A}_\alpha}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)}\,\zeta^{(\alpha-1)}(u-a) \\ + \mathrm{B}_1\zeta(u-b) - \mathrm{B}_2\zeta'(u-b) + \cdots + \frac{(-1)^{\beta-1}\mathrm{A}_\beta}{1 \cdot 2 \dots (\beta-1)}\,\zeta^{(\beta-1)}(u-b) \\ + \cdots + \text{const.} \end{aligned}$$

Car, si l'on accroît u de la période $2\omega_1$ par exemple, ζu s'accroît de $2\eta_1$; ses dérivées restent invariables ; le second membre s'accroît

donc de $2\eta_1(\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 + \dots)$, quantité qui est nulle, puisque la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 + \dots$ des résidus est égale à zéro (1re partie, chap. III, 9).

Par conséquent, ce second membre est une fonction elliptique.

D'ailleurs, dans un parallélogramme des périodes, $\zeta(u-a)$ n'a qu'un seul pôle, $a +$ période; et aux environs de ce pôle unique, les développements de $\zeta(u-a)$ et de ses dérivées $\zeta'(u-a), \dots, \zeta^{(\alpha-1)}(u-a)$ ont pour partie infinie respectivement

$$\frac{1}{(u-a)}, \qquad \frac{-1}{(u-a)^2}, \qquad \dots, \qquad \frac{(-1)^{\alpha-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)}{(u-a)^\alpha}.$$

Il en résulte que le second membre a bien autour de chaque pôle même partie infinie que $f(u)$. Il ne diffère donc de $f(u)$ que par une constante, qu'on déterminera de telle sorte que la différence s'annule.

36. *Application. Intégration des fonctions elliptiques.* — Cette décomposition d'une fonction elliptique en une somme d'éléments simples permet d'intégrer cette fonction. Car nous aurons, en intégrant les deux membres de l'équation du numéro précédent,

$$\int fu\,du = \mathrm{A}_1 d\log\sigma(u-a) - \mathrm{A}_2\zeta(u-a) + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^{\alpha-1}\mathrm{A}_\alpha}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)}\zeta^{(\alpha-2)}(u-a) + \mathrm{B}_1 d\log\sigma(u-b) - \dots + \mathrm{C}u + \mathrm{C}'.$$

37. *Expression par $\wp u$ et $\wp' u$.* — 1° Supposons que $f(u)$ soit une fonction paire. Si elle admet un zéro a_1, elle admettra un zéro $-a_1$, (avec le même degré de multiplicité α_1). Soient donc $\pm a_1, \dots, \pm a_n$ ceux de ses zéros distincts *qui ne sont pas des périodes*; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ leurs degrés respectifs de multiplicité; de même soient

$$\pm b_1, \dots, \pm b_n$$

ses pôles distincts *qui ne sont pas des périodes*; $\beta_1, \dots, \beta_n$ leurs degrés de multiplicité. On aura

$$f(u) = \mathrm{C}\,\frac{(\wp u - \wp a_1)^{\alpha_1}(\wp u - \wp a_2)^{\alpha_2}\dots}{(\wp u - \wp b_1)^{\beta_1}(\wp u - \wp b_2)^{\beta_2}\dots},$$

C désignant une constante. En effet, les deux membres de cette équation sont deux fonctions elliptiques qui ont leurs zéros communs et leurs pôles communs, sauf peut-être ceux des zéros et ceux des pôles qui sont des périodes. Mais si une période est un zéro, toutes les périodes en sont, et si une période est un pôle, toutes en sont également. Or le quotient de $f(u)$ par le second membre est une fonction elliptique ; si cette fonction ne se réduisait pas à une constante C, elle admettrait les périodes à la fois pour zéros et pour pôles, ce qui est impossible.

2° Supposons que $f(u)$ ne soit pas une fonction paire.

On peut l'écrire identiquement

$$f(u) = \frac{f(u)+f(-u)}{2} + \frac{f(u)-f(-u)}{2\wp' u}\,\wp' u.$$

Or $\dfrac{f(u)+f(-u)}{2}$ est évidemment une fonction paire ; de même $\dfrac{f(u)-f(-u)}{2\wp' u}$ (car $f(u)-f(-u)$ est impaire et $\wp' u$ impaire également). On peut exprimer ces deux fonctions elliptiques paires rationnellement au moyen de $\wp u$.

On en conclut que $f(u)$ *peut être exprimée rationnellement en fonction de* $\wp u$ *et* $\wp' u$.

38. Théorème. — *Deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes sont liées par une relation algébrique.*

Car si l'on exprime ces deux fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$ au moyen de $\wp u$, $\wp' u$ on obtient deux relations qui, jointes à celle qui existe entre $\wp u$ et $\wp' u$ (2e partie, chap. I, 18), permettront d'éliminer ces deux dernières quantités, et conduiront à une équation algébrique entre $f(u)$ et $\varphi(u)$.

Il est facile d'évaluer le degré de cette équation par rapport à f et à φ. Soit m l'ordre de f. A chaque valeur particulière f_0 de f correspondent, dans un parallélogramme des périodes, m valeurs de u, savoir $u_0, u_1, \ldots, u_m$, et par conséquent, *en général*, m valeurs distinctes de φ, savoir $\varphi(u_0), \ldots, \varphi(u_m)$. De même si μ est l'ordre de φ, à chaque valeur de φ correspondent μ valeurs de f (en général). L'équation sera

donc au plus (et ce sera le cas général) du degré m par rapport à φ et du degré μ par rapport à f.

Ces degrés peuvent d'ailleurs s'abaisser, par exemple quand f et φ sont des fonctions paires de u. Car si à la valeur f_0 de f correspond la valeur u_1 de u, à cette même valeur f_0 correspond aussi la valeur $-u_1 +$ période. Mais à ces deux valeurs de u ne répond qu'une seule valeur de φ. L'équation sera donc de degré $\dfrac{m}{2}$ par rapport à φ et, pour la même raison, de degré $\dfrac{\mu}{2}$ par rapport à f.

39. *Relation entre une fonction elliptique et sa transformée.* — Soit $f(u, \omega_1, \omega_2)$ une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. A ces périodes on en substitue deux autres $2\omega'_1, 2\omega'_2$ liées aux premières par les relations

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= a \cdot 2\omega'_1 + b \cdot 2\omega'_2, \\ 2\omega_2 &= c \cdot 2\omega'_1 + d \cdot 2\omega'_2. \end{aligned}$$

Les sommets du premier réseau font évidemment tous partie du second réseau (la réciproque n'est pas vraie, à moins que la transformation ne soit du premier degré). De là résulte que la fonction elliptique *transformée* $f(u, \omega'_1, \omega'_2)$ admet les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$.

Par conséquent, *la fonction elliptique $f(u)$ est liée à sa transformée par une équation algébrique.*

Nous avons annoncé (1re partie, chap. II, 7) et nous prouverons bientôt que la transformée de $\wp u$ est une fonction rationnelle de $\wp u$. C'est là une des supériorités de la fonction $\wp u$.

40. Théorème. — *Toute fonction elliptique $f(u)$ est liée à sa dérivée par une équation algébrique.*

Car $f(u)$ et $f'(u)$ sont deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes.

Si u_1 est un pôle de degré α_1 de $f(u)$, ce sera un pôle de degré $\alpha + 1$ de $f'(u)$. L'ordre μ de $f'(u)$ surpassera donc l'ordre m de $f(u)$ d'autant d'unités qu'il y a de pôles distincts de $f(u)$. Supposons qu'il y en ait k.

L'équation entre $f(u)$ et $f'(u)$ sera du degré m par rapport à $f'(u)$ et du degré $m + k$ par rapport à $f(u)$.

Ce théorème est d'une importance capitale. Il montre que certaines équations du premier ordre de la forme

$$\mathrm{F}\left(z, \frac{dz}{du}\right) = 0$$

où ne figure pas explicitement la variable indépendante u, algébriques par rapport à z et à $\dfrac{dz}{du}$, et de degré m par rapport à cette dérivée, peuvent être intégrées au moyen d'une fonction elliptique $z = f(u)$ d'ordre m.

Reconnaître directement sur l'équation s'il en est ainsi et intégrer dans ce cas est un problème qui a été résolu complètement par Briot et Bouquet.

CHAPITRE V

ADDITION DES ARGUMENTS POUR LA FONCTION $\wp u$. MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT.

41. *Addition des arguments.* — Notre but est de montrer que $\wp(u+v)$ *s'exprime rationnellement en fonction de* $\wp u$, $\wp v$, $\wp' u$, $\wp' v$.

1° Cherchons l'expression de $\wp u - \wp v$. Considérée comme fonction de la variable u, cette différence admet, aux périodes près, un seul pôle (double) $u = 0$. Elle est donc du second ordre ; par suite elle n'admet *que deux zéros* distincts qui sont évidemment $u = \pm v$. Elle sera donc (34) de la forme

$$\wp u - \wp v = \mathrm{C}\,\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

Pour déterminer la constante C, il suffit d'identifier les valeurs principales pour u infiniment petit, en se rappelant que la valeur principale de $\wp u$ est $\frac{1}{u^2}$ (17) et que celle de σu est u (31). On trouve ainsi

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{\mathrm{C}\,\sigma^2 v}{u^2}, \qquad \mathrm{C} = -\frac{1}{\sigma^2 v};$$

d'où l'expression cherchée

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

2° Prenons la dérivée logarithmique des deux membres par rapport à u, il viendra

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u.$$

Cette formule, quand on y échange u et v, devient (ζ étant impaire)

$$\frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v.$$

Ajoutons celle-ci à la première et divisons par 2 :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v.$$

Différentions encore par rapport à u :

$$\wp(u+v) - \wp u = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Si, après avoir effectué la différentiation du second membre, nous remplaçons $\wp'' u$ par sa valeur (19) $6\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2$, nous obtenons $\wp(u+v)$ en fonction rationnelle de $\wp u$, $\wp v$, $\wp' u$, $\wp' v$, comme nous l'avions annoncé. Mais la formule ainsi obtenue ne serait pas symétrique en u et v.

3° Pour arriver à une formule symétrique nous dirigerons le calcul de la manière que voici. Effectuons

$$\frac{d}{du}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{\wp'' u(\wp u - \wp v) - \wp' u(\wp' u - \wp' v)}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Si nous remplaçons $\wp'' u$ par sa valeur $6\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2$ et $\wp'^2 u$ par sa valeur $4\wp^2 u - g_2 \wp u - g_3$, le numérateur du second membre devient

$$\begin{aligned}(\wp u - \wp v)\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2\right) - (4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3) + \wp' v\,\wp' u \\ = 2\wp^3 u + \frac{1}{2}\,g_2\wp u + g_3 - 6\wp^2 u\,\wp v + \frac{1}{2}\,g_2\wp v + \wp' v\,\wp' u.\end{aligned}$$

De là résulte

$$\begin{aligned}\wp(u+v) &= \wp u - \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \\ &= \frac{\left\{\begin{aligned} &2\wp^2 u\,\wp v + 2\wp u\,\wp^2 v - \left(\frac{1}{2}\,g_2\wp u + \frac{1}{2} g_3\right) \\ &\qquad - \left(\frac{1}{2}\,g_2\wp v + \frac{1}{2} g_3\right) - \wp' v\,\wp' u\end{aligned}\right.}{2(\wp u - \wp v)^2}.\end{aligned}$$

Si au numérateur du second membre on remplace $g_2\wp + g_3$ par sa valeur $-\wp'^2 + 4\wp^3$, ce numérateur devient

$$\begin{aligned}2\wp^2u\,\wp v + 2\wp u\,\wp^2 v + \frac{1}{2}(\wp'^2 u - 4\wp^3) + \frac{1}{2}(\wp'^2 v - 4\wp^3 v) - \wp' v\,\wp' u\\ = 2\wp^2 u(\wp v - \wp u) + 2\wp^2 v(\wp u - \wp v) + \frac{1}{2}(\wp' u - \wp' v)^2\\ = -2(\wp u + \wp v)(\wp u - \wp v)^2 + \frac{1}{2}(\wp' u - \wp' v)^2.\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\wp(u+v) = -\wp u - \wp v + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

Telle est l'importante formule de *l'addition des arguments* pour la fonction $\wp u$.

42. *Multiplication de l'argument par* 2. — Si dans cette formule nous faisons tendre v vers u, nous aurons

$$\wp 2u = -2\wp u + \frac{1}{4}\,\frac{\wp''^2 u}{\wp'^2 u} = \frac{1}{4}\,\frac{\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2\right)^2}{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3}.$$

Une différentiation fournirait $\wp' 2u$.

Faisant ensuite dans la formule d'addition

$$v = 2u, 3u, \ldots,$$

on obtiendrait des formules pour la multiplication de l'argument de $\wp u$ par un entier quelconque.

Nous y parviendrons, au chapitre suivant, d'une manière plus élégante.

CHAPITRE VI

MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT DE $\wp u$ (*suite*). DIVISION DE L'ARGUMENT.

43. Reprenons la formule (41)

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

et remplaçons-y u par nu et v par u ; elle devient

$$\wp nu - \wp u = -\frac{\sigma(n+1)u\,\sigma(n-1)u}{\sigma^2 nu\,\sigma^2 u} = -\frac{\dfrac{\sigma(n+1)u}{[\sigma u]^{(n+1)^2}}\;\dfrac{\sigma(n-1)u}{[\sigma u]^{(n-1)^2}}}{\left[\dfrac{\sigma\,nu}{(\sigma u)^{n^2}}\right]^2};$$

expression qui, si l'on y pose

$$\psi_n u = \frac{\sigma\,nu}{(\sigma u)^{n^2}},$$

devient à son tour

$$\wp nu - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

C'est en exprimant les fonctions ψ au moyen de $\wp u$, $\wp' u$ suivant la règle indiquée précédemment (2e partie, ch. IV, 17) que nous obtiendrons la représentation cherchée de $\wp u$.

44. *Étude de la fonction $\psi_n u$.* — Pour prouver que $\psi_n u$ est une fonction elliptique, cherchons l'effet sur $\sigma\,nu$ du changement de u en $u + 2\omega_1$

et $u + 2\omega_2$. Nous aurons par exemple (39)

$$\begin{aligned}
\sigma(nu + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(nu+\omega_1)}\,\sigma\, nu,\\
\sigma(nu + 4\omega_1) = \sigma(nu + 2\omega_1 + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(nu+2\omega_1+\omega_1)}\,\sigma(nu + 2\omega_1)\\
&= e^{2\eta_1\left[2nu+\omega_1(1+3)\right]}\,\sigma\, nu.
\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}
\sigma(nu + 2n\omega_1) &= (-1)^n e^{2\eta_1\left[n.nu+\omega_1(1+3+5+\cdots+2n-1)\right]}\\
&= (-1)^n\, e^{2\eta_1(n^2u+n^2\omega_1)}\,\sigma\, nu.
\end{aligned}$$

Cela posé, on a

$$\begin{aligned}
\psi_n(u + 2\omega_1) = \frac{\sigma(nu + 2n\omega_1)}{\left[\sigma(u + \omega_1)\right]^{n^2}} &= \frac{(-1)^n\, e^{2\eta_1 n^2(u+\omega_1)}\,\sigma\, nu}{\left[-e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\right]^{n^2}\,(\sigma u)^{n^2}}\\
&= \frac{(-1)^n}{(-1)^{n^2}}\,\frac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}} = \frac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}} = \psi_n u;
\end{aligned}$$

$\psi_n u$ est donc une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$.

Passons à la représentation de $\psi_n u$ au moyen de $\wp u$.

Comme σu est une fonction entière, $\psi_n u$ n'a d'autres pôles que les zéros de σu, qui sont tous des périodes.

Ensuite, les zéros de $\psi_n u$ sont ceux de $\sigma\, nu$; ils sont donc donnés par la formule

$$nu = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

d'où

$$u = \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}.$$

Ces zéros sont simples. Cherchons ceux d'entre eux qui ne sont pas des périodes et qui sont distincts. On les trouvera tous en attribuant à m_1, m_2 les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ (sauf la combinaison $m_1 = m_2 = 0$). Cela fait en tout $n^2 - 1$ zéros.

Mais ces n^2-1 zéros ne sont pas encore tous distincts. Ici deux cas sont à distinguer.

1° *n est impair.* — A chaque zéro $\dfrac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}$ en correspond un autre

$$\frac{2(n-m_1)\omega_1+2(n-m_2)\omega_2}{n}$$

qui n'en est pas distinct, puisque la somme de ces deux zéros est $2\omega_1+2\omega_2$. Il n'y a donc que $\dfrac{n^2-1}{2}$ zéros distincts. Quant aux pôles, nous l'avons dit, tous sont des périodes. Aucun dénominateur ne figurera donc dans la représentation de la fonction paire $\psi_n u$ au moyen de $\wp(u)$, et l'on aura, en appliquant la formule du n° 37,

$$\psi_n u = n\prod\left[\wp u-\wp\left(\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}\right)\right]=\mathrm{P}_1,$$

P_1 étant un polynôme de degré $\dfrac{n^2-1}{2}$ en $\wp u$. Le facteur constant est bien égal à n ; car les valeurs principales des deux membres pour u infiniment petit sont toutes deux égales à $\dfrac{n}{u^{n^2-1}}$.

2° *n est pair.* — On doit mettre à part les trois systèmes de valeurs

$$\left(m_1=\frac{n}{2},m_2=0\right),\ \left(m_1=0,m_2=\frac{n}{2}\right),\ \left(m_1=\frac{n}{2},m_2=\frac{n}{2}\right),$$

pour lesquelles les zéros de $\psi_n u$ sont $\omega_1,\omega_2,\omega_1+\omega_2$. Mais ces trois zéros sont précisément des zéros de $\wp' u$. Il reste n^2-4 zéros, qui peuvent être rapprochés deux à deux comme précédemment et dont $\dfrac{n^2-4}{2}$ seulement sont distincts. La fonction elliptique paire $\dfrac{\psi_n u}{\wp' u}$ pourra s'exprimer rationnellement au moyen de $\wp u$; et l'on aura

$$\psi_n u=-\frac{n}{2}\wp' u\prod\left[\wp u-\wp\left(\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}\right)\right]=\mathrm{P}_2\wp' u;$$

le signe $\prod$ portant sur $\dfrac{n^2-4}{2}$ facteurs, et P_2 désignant un polynôme de degré $\dfrac{n^2-4}{2}$ en $\wp u$.

45. *Multiplication de l'argument de $\wp u$ par n.* — Tout ceci étant acquis, la formule ci-dessus (43)

$$\wp nu - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}$$

résout le problème de la multiplication de l'argument de $\wp u$ par n, c'est-à-dire permet de former l'expression de $\wp nu$ *en fonction rationnelle de* $\wp u$:

1° *n étant pair*, et par conséquent $n+1$ et $n-1$ impairs, on a

$$\psi_n = \mathrm{P}_1, \qquad \psi_{n+1} = \mathrm{Q}_1\wp' u, \qquad \psi_{n-1} = \mathrm{R}_1\wp' u,$$

$\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \mathrm{R}_1$ étant des polynômes en $\wp u$. On voit donc que

$$\wp nu = \wp u - \wp'^2 u\,\frac{\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1}{\mathrm{P}_1^2} = \wp u - (4\wp^3 - g_2\wp - g_3)\,\frac{\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1}{\mathrm{P}_1^2}$$

s'exprime rationnellement en fonction de $\wp u$.

2° *n étant impair*, et par conséquent $n+1$ et $n-1$ pairs, on a

$$\psi_n = \mathrm{P}_2\wp' u, \qquad \psi_{n+1} = \mathrm{Q}_2, \qquad \psi_{n-1} = \mathrm{R}_2,$$

$$\wp nu = \wp u - \frac{\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2}{\mathrm{P}_2^2\,\wp'^2 u} = \wp u - \frac{\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2}{\mathrm{P}_2^2(4\wp^3 - g_2\wp - g_3)};$$

$\wp nu$ est toujours une fonction rationnelle de $\wp u$.

46. *Calcul des polynômes* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$. — Il est facile de calculer en fonction des deux invariants g_2, g_3 les coefficients des deux polynômes $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ dont le premier

$$\left(\text{de degré } \frac{n^2-1}{2} \text{ en } \wp u\right)$$

représente $\psi_n u = \dfrac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}}$ quand n est pair, et le second $\left(\text{de degré } \dfrac{n^2-4}{2}\right)$ représente $\dfrac{\psi_n u}{\wp' u} = \dfrac{1}{\wp' u}\, \dfrac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}}$ quand n est impair :

$$\mathrm{P}_1 = \alpha \wp^{\frac{n^2-1}{2}} + \alpha_1 \wp^{\frac{n^2-1}{2}-1} + \cdots = \frac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}},$$

$$\mathrm{P}_2 = \beta \wp^{\frac{n^2-4}{2}} + \beta_1 \wp^{\frac{n^2-4}{2}-1} + \cdots = \frac{1}{\wp' u}\, \frac{\sigma\, nu}{(\sigma u)^{n^2}}.$$

On obtient $\alpha, \alpha_1, \ldots,\ \beta, \beta_1, \ldots$ par la méthode des coefficients indéterminés, en remplaçant dans les deux équations précédentes $\wp u$, $\wp' u$, σu, $\sigma\, nu$ par leurs développements

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots, \qquad \wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2c_1 u + 4c_2 u^3 + \ldots;$$
$$\sigma u = u(1 + d_1 u^4 + \ldots) \qquad\qquad \sigma\, nu = nu(1 + d_1 n^4 u^4 + \ldots).$$

On trouve, en identifiant les puissances semblables de u,

$$\alpha = n, \qquad \alpha_1 = 0, \ldots \qquad \beta = -\frac{n}{2}, \qquad \beta_1 = 0, \ldots$$

47. *Division de l'argument de $\wp u$.* — Supposons $\wp nu$ donné, et proposons-nous de calculer $\wp u$. Nous aurons à résoudre par rapport à cette dernière quantité l'équation

$$\wp nu - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2},$$

dont le second membre est une fonction rationnelle de $\wp u$ que nous venons d'apprendre à former.

Il serait facile d'évaluer le degré de cette équation par rapport à l'inconnue $\wp u$, en comptant les degrés des polynômes $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \mathrm{R}_1$, $\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2, \mathrm{R}_2$ du n° 45. Mais nous pouvons le faire *a priori* de la manière suivante.

A la valeur donnée de $\wp nu$ correspondent une infinité de valeurs de u fournies par la formule

$$\pm u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$$

et par suite les valeurs de $\wp u$ comprises dans l'expression

$$\wp\left(u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right),$$

où les entiers m_1, m_2 peuvent être supposés positifs et plus petits que n, et où u_0 est pris seulement avec le signe $+$. Car si m_1 et m_2 ne remplissent pas ces conditions, en ajoutant à l'argument de $\wp$ une période convenable, on ramènera cet argument à un autre de même forme $u_0 + \dfrac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}$ où les entiers m'_1, m'_2 seront positifs et inférieurs à n ; et si u_0 est pris avec le signe $-$, l'argument $-u_0 + \dfrac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$ peut être, sans que la valeur de $\wp$ soit altérée, remplacé par $u_0 - \dfrac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$, où u_0 est affecté du signe $+$.

Le nombre des valeurs distinctes de $\wp u$ est donc celui des systèmes des entiers m_1, m_2 qui prennent la suite des valeurs $0, 1, 2, \dots, n$. Ce nombre est n^2. Tel est effectivement le degré de l'équation qui donne $\wp u$ en fonction de $\wp nu$.

CHAPITRE VII

DIVISION DES PÉRIODES DE $\wp u$.

48. Le problème consiste à évaluer $\wp\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$ en fonction de $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$. Nous allons montrer que la première de ces deux fonctions, que nous appellerons pour abréger $\overline{\wp}u$, s'exprime rationnellement au moyen de la seconde, comme nous l'avons annoncé dans la première partie (ch. II, 7).

Quand n est un nombre composé, la question peut être simplifiée. Supposons que n soit le produit de deux autres entiers,

$$n = n' \times n''.$$

Nous pouvons d'abord évaluer

$$\wp\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \wp\left(u, \frac{\frac{\omega_1}{n'}}{n''}, \omega_2\right)$$

en fonction de $\wp\left(u, \frac{\omega_1}{n'}, \omega_2\right)$, puis $\wp\left(u, \frac{\omega_1}{n'}, \omega_2\right)$ en fonction de $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$.

Comme tout nombre pair est le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair, nous sommes ramenés à étudier ces deux cas : 1° division d'une période par 2 ; 2° division d'une période par un nombre impair.

49. *Division d'une période par* 2. — Nous allons exprimer $\overline{\wp}u = \wp\left(u, \frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)$ au moyen de la fonction $\zeta(u, \omega_1, \omega_2)$ et de ses dérivées (2e partie, ch. IV, 35).

La fonction $\overline{\wp}u$ admet les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Elle admet deux pôles doubles distincts 0 et ω_1. Aux environs de ces pôles, les parties infinies de son développement sont respectivement $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{(u-\omega_1)^2}$. On aura donc (35)

$$\overline{\wp}u = -\zeta' u - \zeta'(u - \omega_1) + \mathrm{C} = \wp u + \wp(u - \omega_1) + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C, observons qu'aux environs de $u = 0$, le développement de $\overline{\wp} u$, comme celui de $\wp u$, est privé de terme constant ; donc

$$0 = \wp(-\omega_1) + \mathrm{C},$$
$$\mathrm{C} = -\wp(-\omega_1) = -\wp(\omega_1) = -e_1.$$

D'ailleurs, d'après la formule d'addition (2e partie, ch. V, 41)

$$\wp(u - \omega_1) = -\wp u - \wp(-\omega_1) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u - \wp'(-\omega_1)}{\wp u - \wp(-\omega_1)}\right]^2$$

ou bien, si l'on observe que

$$\wp(-\omega_1) = \wp(\omega_1) = e_1,$$
$$\wp'(-\omega_1) = \wp'(-\omega_1 + 2\omega_1) = \wp'(\omega_1) = 0,$$

et qu'on remplace $\wp'^2 u$ par sa valeur

$$4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$

il vient

$$\wp(u - \omega_1) = -\wp u - e_1 + \frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}{\wp u - e_1}.$$

Nous avons à calculer $\wp(u - \omega_1) + \mathrm{C}$, c'est-à-dire $\wp(u - \omega_1) - e_1$. En effectuant le calcul, on trouve

$$\wp(u - \omega_1) - e_1 = \frac{-(e_1 + e_2 + e_3)\wp u + 2e_1^2 + e_2 e_3}{\wp u - e_1}.$$

Finalement, si l'on tient compte de la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

d'où résulte l'identité

$$2e_1^2 + e_2 e_3 = (e_2 - e_1)(e_3 - e_1),$$

on trouve

$$\overline{\wp}u = \wp u + \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{\wp u - e_1}.$$

50. *Division d'une période par un nombre impair.* — Soit $n = 2m+1$. Nous voulons exprimer $\overline{\wp}u = \wp(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2)$ en fonction de $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$. Nous nous servirons toujours de la représentation d'une fonction elliptique par $\zeta(u, \omega_1, \omega_2)$ et ses dérivées par rapport à u.

La fonction $\overline{\wp}u$ admet les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ et les pôles distincts $0, \pm\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, \pm\frac{2m\omega_1}{n}$. Ces pôles sont doubles, sans résidu ; le développement de la partie infinie de $\overline{\wp}u$ autour de l'un d'eux $\frac{2k\omega_1}{n}$ se réduit à $\frac{1}{\left(u - \frac{2k\omega_1}{n}\right)^2}$. Nous aurons donc (35)

$$\begin{aligned}\overline{\wp}u &= -\zeta' u - \sum_{k=-m}^{k=+m} \zeta'\left(u + \frac{2k\omega_1}{n}\right) + \mathrm{C},\\ &= \wp u + \sum_{k=-m}^{k=+m} \wp\left(u + \frac{2k\omega_1}{n}\right) + \mathrm{C},\end{aligned}$$

(en excluant la valeur $k = 0$). Pour déterminer la constante C, nous faisons tendre u vers zéro et nous remarquons que les développements de $\overline{\wp}u$ et de $\wp u$ ont l'un et l'autre pour partie principale $\frac{1}{u^2}$ sans terme constant, ce qui donne

$$0 = \sum_{-m}^{+m} \wp\frac{2k\omega_1}{n} + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{C} = -\sum_{-m}^{+m} \wp\frac{2k\omega_1}{n}.$$

D'autre part, nous avons, en appliquant la formule d'addition :

$$\wp\left(u+\frac{2k\omega_1}{n}\right) = -\wp u - \wp\frac{2k\omega_1}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp'\dfrac{2k\omega_1}{n}}{\wp u - \wp\dfrac{2k\omega_1}{n}}\right)^2.$$

Substituons dans l'expression de $\overline{\wp} u$; effectuons le carré de $\wp' u - \wp'\dfrac{2k\omega_1}{n}$ et remarquons que les doubles produits donnent des termes impairs qui doivent se détruire puisque $\overline{\wp} u$ est une fonction paire ; nous obtenons

$$\overline{\wp} u = \wp u + \sum_{-m}^{+m}\left[-\wp u - 2\wp\frac{2k\omega_1}{n} + \frac{1}{4}\,\frac{\wp'^2 u + \wp'^2\,\dfrac{2k\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp\,\dfrac{2k\omega_1}{n}\right)^2}\right].$$

En remplaçant $\wp'^2 u$ par sa valeur $4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$, on voit que $\overline{\wp} u$ s'exprime bien *rationnellement en fonction de* $\wp u$.

En résolvant le problème de la division des périodes de la fonction $\wp u$, nous nous trouvons, comme nous l'avons expliqué (1re partie, ch. II, 7), avoir résolu complètement le problème de la transformation de $\wp u$.

TROISIÈME PARTIE

LES FONCTIONS sn u, cn u, dn u

CHAPITRE I

LES FONCTIONS $\sigma_{01}u$, $\sigma_{02}u$, $\sigma_{03}u$.

Avant que Weierstrass eût fait prévaloir l'usage de la fonction $\wp u$, Abel et Jacobi avaient introduit dans la science trois fonctions elliptiques très simples que plus tard on appela $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ et dont il importe de ne pas abandonner l'étude parce que, malgré les incontestables avantages de la fonction $\wp u$, elles se présentent dans mainte application d'une manière plus naturelle que cette dernière. Seulement, au lieu de construire *a priori* ces anciennes fonctions elliptiques, nous les ferons dériver de $\wp u$. Nous les rattacherons très simplement à celles-ci par l'intermédiaire de trois nouvelles fonctions elliptiques $\sigma_{01}u$, $\sigma_{02}u$, $\sigma_{03}u$.

51. *La fonction $\sigma_{01}u$.* — L'introduction de cette fonction $\sigma_{01}u$ repose sur la remarquable propriété du radical $\sqrt{\wp u - e_1}$ d'être *une fonction uniforme de u.*

Reprenons en effet la formule (2e partie, ch. V, 41)

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v},$$

et faisons-y $v = \omega_1$. Comme $\wp\omega_1 = e_1$ par définition, il viendra

$$\wp u - e_1 = -\frac{\sigma(u+\omega_1)\sigma(u-\omega_1)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_1}.$$

En raisonnant comme 2e partie, ch. III, 32, on voit que

$$\sigma(u-\omega_1) = \sigma(u+\omega_1-2\omega_1) = -e^{-2\eta_1(u+\omega_1-\omega_1)}\,\sigma(u+\omega_1);$$

donc

$$\wp u - e_1 = e^{-2\eta_1 u}\,\frac{\sigma^2(u+\omega_1)}{\sigma^2 u\, \sigma^2\omega_1},$$

$$\sqrt{\wp u - e_1} = e^{-\eta_1 u}\,\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma u\, \sigma\omega_1}.$$

Ainsi $\sqrt{\wp u - e_1}$ est une fonction uniforme de u. Ce radical a deux déterminations. Celle que fournit l'équation précédente est celle qui, pour u infiniment petit, a pour valeur principale $+\frac{1}{u}$, puisque la valeur principale de σu est $+u$.

L'inverse de $\sqrt{\wp u - e_1}$ est une fonction uniforme que nous désignons par $\sigma_{01} u$. Ainsi

$$\sigma_{01} u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}} = e^{\eta_1 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_1}{\sigma(u+\omega_1)}.$$

Nous allons étudier cette fonction $\sigma_{01} u$, importante parce que la fonction $\operatorname{sn} u$ en est, comme nous le verrons, un cas particulier.

52. *Propriétés de $\sigma_{01} u$.* — Nous allons montrer que $\sigma_{01} u$ *est une fonction elliptique.*

1° $\sigma_{01} u$ *est une fonction impaire.* — Car si l'on change u en $-u$, $\wp u - e_1$ garde sa valeur. On aura donc

$$\sigma_{01}(-u) = \frac{1}{\pm\sqrt{\wp u - e_1}}.$$

Seulement, comme la valeur principale du second membre est $+\frac{1}{u}$ quand on prend le radical avec le signe $+$, c'est le signe $-$ qu'il faut prendre, afin que cette valeur principale soit $-\frac{1}{u}$ [inverse de celle de $\sigma_{01}(-u)$]. De là résulte

$$\sigma_{01}(-u) = -\sigma_{01} u.$$

2° $\sigma_{01} u$ *admet pour période* $4\omega_2$. — En effet, changeons u en $u + 2\omega_2$; $\wp u - e_1$ conserve sa valeur. On ne peut donc avoir que

$$\sigma_{01}(u + 2\omega_2) = \pm\sigma_{01} u.$$

Pour décider du signe qu'il faut prendre, donnons à u la valeur particulière $-\omega_2$, nous aurons

$$\sigma_{01}\omega_2 = \pm\sigma_{01}(-\omega_2).$$

Mais, $\sigma_{01}u$ étant une fonction impaire, c'est le signe $-$ qui convient. Donc

$$\sigma_{01}(u + 2\omega_2) = -\sigma_{01}u.$$

Augmentons encore l'argument de $2\omega_2$; il viendra

$$\sigma_{01}(u + 4\omega_2) = -\sigma_{01}(u + 2\omega_2) = \sigma_{01}u.$$

Donc $4\omega_2$ est une période de $\sigma_{01}u$.

On prouverait de même que $4\omega_3$ en est une aussi.

3° *$\sigma_{01}u$ admet la période $2\omega_1$.* — Le raisonnement qui précède est inapplicable dans ce cas. Car l'expression $\sigma_{01}\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}$ n'a plus de sens quand on y remplace u par $-\omega_1$, puisque $\wp(-\omega_1) = \wp\omega_1 = e_1$. Nous recourrons à l'expression ci-dessus de $\sigma_{01}u$ par la fonction σ. En remplaçant dans cette expression u par $u + 2\omega_1$, nous avons

$$\sigma_{01}(u + 2\omega_1) = e^{\eta_1(u+2\omega_1)}\,\frac{\sigma(u + 2\omega_1)\,\sigma\omega_1}{\sigma(u + \omega_1 + 2\omega_1)}.$$

Mais (2e partie, ch. III, 32)

$$\sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma u,$$
$$\sigma(u + \omega_1 + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1+\omega_1)}\,\sigma(u + \omega_1);$$

donc

$$\sigma_{01}(u + 2\omega_1) = e^{\eta_1 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_1}{\sigma(u + \omega_1)} = \sigma_{01}u.$$

Ainsi $2\omega_1$ est une période de $\sigma_{01}u$.

Cette fonction étant uniforme, doublement périodique, et n'ayant évidemment, d'après sa composition, d'autres singularités que des pôles, est une fonction elliptique, c. q. f. d.

53. *Pôles et zéros de $\sigma_{01}u$.* — Les pôles de $\sigma_{01}u$ sont les racines de

$$\wp u - e_1 = \wp u - \wp\omega_1 = 0.$$

Ils sont donc donnés par la formule

$$u = \omega_1 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Ces pôles sont simples.

Les zéros de $\sigma_{01}u$ sont les pôles de $\wp u$, et comme ces pôles sont doubles, ces zéros sont simples à cause du radical qui porte sur $\wp u - e_1$. Tous ces zéros sont compris dans la formule

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

54. *Équation algébrique entre $\sigma_{01}u$ et sa dérivée.* — Pour obtenir cette équation, il suffit de remplacer $\wp u$ par sa valeur $e_1 + \dfrac{1}{\sigma_{01}^2 u}$ dans la relation

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3).$$

On a

$$\wp u = e_1 + \frac{1}{\sigma_{01}^2 u}, \qquad \wp' u = -2\,\frac{\sigma'_{01}u}{\sigma_{01}^3 u}.$$

La substitution donne

$$4\,\frac{\sigma'^2_{01}u}{\sigma_{01}^6 u} = \frac{4}{\sigma_{01}^2 u}\left(\frac{1}{\sigma_{01}^2 u} + e_1 - e_2\right)\left(\frac{1}{\sigma_{01}^2 u} + e_1 - e_3\right).$$

Posons pour simplifier

$$e_3 - e_1 = \mathrm{M}^2, \qquad e_2 - e_1 = \mathrm{M}^2 k^2.$$

L'équation entre $\sigma_{01}u$ et sa dérivée deviendra, après suppression du facteur $\dfrac{4}{\sigma_{01}^6 u}$,

$$\sigma'^2_{01}u = (1 - \mathrm{M}^2\,\sigma_{01}^2 u)(1 - \mathrm{M}^2 k^2\,\sigma_{01}^2 u).$$

55. *Les fonctions $\sigma_{02}u$, $\sigma_{03}u$.* — Les fonctions elliptiques $\sigma_{02}u$, $\sigma_{03}u$ sont définies par des formules analogues à celles qui servent de définition à $\sigma_{01}u$:

$$\sigma_{02} = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_2}} = e^{\eta_2 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_2}{\sigma(u+\omega_2)},$$
$$\sigma_{03} = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_3}} = e^{\eta_3 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_3}{\sigma(u+\omega_3)}.$$

Insistons un peu sur la dernière expression, car nous n'avons encore rien dit de la quantité η_3 qui y figure.

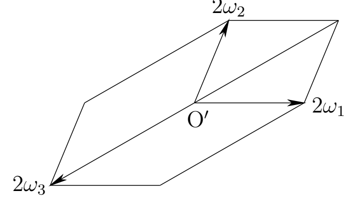
Nous avons introduit les deux quantités $\eta_1 = \zeta\omega_1$, $\eta_2 = \zeta\omega_2$ en étudiant la fonction ζu construite avec les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ (2e partie, ch. III, 29). On obtient la même fonction ζu en partant des deux périodes $2\omega_1, 2\omega_3$, qui conservent les sommets du réseau construit sur $2\omega_1, 2\omega_2$. Cette fonction $\zeta(u, \omega_1, \omega_3)$ introduit à son tour la quantité

$$\eta_3 = \zeta\omega_3.$$

Nous avons vu que si, prenant la direction $2\omega_1$ pour faire le tour du parallélogramme construit sur $2\omega_1, 2\omega_2$, on se trouve marcher dans le sens direct, on a entre ω_1, ω_2, η_1, η_2 la relation (2e partie, ch. III, 29)

$$2(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = \pi i.$$

Or, l'égalité $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ se traduit géométriquement par ce fait que la période $2\omega_3$ est égale et directement opposée à la diagonale du parallélogramme construit sur $2\omega_1$, $2\omega_2$.



Il s'ensuit que les deux parallélogrammes construits respectivement sur $2\omega_2$, $2\omega_3$ et $2\omega_3$, $2\omega_1$ seront contournés dans le sens direct, si l'on part du point de concours O′ des trois périodes, pour le premier dans la direction $2\omega_2$, pour le second dans la direction $2\omega_3$. Nous n'avons donc,

dans la relation ci-dessus, qu'à faire sur les indices une permutation circulaire, pour obtenir les deux relations corrélatives

$$2(\eta_2\omega_3 - \eta_3\omega_2) = 2(\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3) = \pi i.$$

Il est facile de voir que ces trois relations, jointes à $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, entraînent l'égalité

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

56. *Tableau des propriétés des trois fonctions $\sigma_{01}u$, $\sigma_{02}u$, $\sigma_{03}u$.* — A chacune des trois racines e_1, e_2, e_3 correspond une fonction elliptique

$$\sigma_{01}u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}, \quad \sigma_{02}u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_2}}, \quad \sigma_{03}u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_3}}$$

ou bien encore

$$\sigma_{01}u = e^{\eta_1 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_1}{\sigma(u+\omega_1)}, \; \sigma_{02}u = e^{\eta_2 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_2}{\sigma(u+\omega_2)}, \; \sigma_{03}u = e^{\eta_3 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_3}{\sigma(u+\omega_3)}.$$

Souvenons-nous des trois relations

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Voici le tableau des périodes, des pôles et des zéros de ces trois fonctions

Fonction	Périodes	Pôles	Zéros
$\sigma_{01}u$	$2\omega_1, 4\omega_2, 4\omega_3$	$\omega_1 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$	$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$
$\sigma_{02}u$	$2\omega_2, 4\omega_3, 4\omega_1$	$\omega_2 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$	»
$\sigma_{03}u$	$2\omega_3, 4\omega_1, 4\omega_2$	$\omega_3 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$	»

Rappelons-nous aussi que $2\omega_2$ et $2\omega_3$ sont des demi-périodes pour $\sigma_{01}u$, c'est-à-dire que $\sigma_{01}(u + 2\omega_2)$ par exemple est égal à $-\sigma_{01}u$. De même $2\omega_3$ et $2\omega_1$ pour $\sigma_{02}u$, et $2\omega_1$, $2\omega_2$ pour $\sigma_{03}u$.

CHAPITRE II

LA FONCTION $\operatorname{sn} u$.

57. *Définition de* $\operatorname{sn} u$. — La fonction $\operatorname{sn} u$ est un cas particulier de $\sigma_{01}u$, celui où le *multiplicateur* M est égal à 1.

Ainsi $\operatorname{sn} u$ est une fonction elliptique, et elle est complètement déterminée quand on donne le carré de son *module* k.

Nous avons vu en effet que la fonction $\wp u$ est parfaitement déterminée par les trois quantités e_1, e_2, e_3 (2e partie, chap. II). Reportons-nous aux formules du n° 54 ; si l'on y fait $\mathrm{M} = 1$, elles deviennent

$$e_3 - e_1 = 1, \qquad e_2 - e_1 = k^2;$$

jointes à $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, elles donnent

$$e_1 = -\frac{1+k^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \qquad e_3 = \frac{2-k^2}{3},$$

et en partant de ces trois quantités qui ne dépendent que de k^2, nous pouvons construire une fonction $\wp u$ et une seule. A cette fonction $\wp u$ correspond une seule fonction $\sigma_{01}u$ qui est précisément $\operatorname{sn} u$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{\wp u + \dfrac{1+k^2}{3}}}.$$

58. *Équation algébrique entre* $\operatorname{sn} u$ *et sa dérivée.* — Si dans l'équation qui lie $\sigma_{01}u$ à sa dérivée (54), nous faisons $\mathrm{M} = 1$, nous obtenons la relation algébrique en $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn}' u$

$$\operatorname{sn}' u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u).$$

La forme de cette équation différentielle à laquelle satisfait $\operatorname{sn} u$ confirme le fait que $\operatorname{sn} u$ ne dépend que de k^2.

Cette équation différentielle pourrait, avec la condition complémentaire $\operatorname{sn} 0 = 0$, servir de définition à $\operatorname{sn} u$.

59. *Périodes de* $\operatorname{sn} u$. — Appelons $2\Omega_1, 2\Omega_2$ les périodes d'une fonction $\wp u$ telle que $e_3 - e_1 = 1$.

D'après ce que nous avons dit des périodes de $\sigma_{01} u$ (52), celles de $\operatorname{sn} u$ seront $2\Omega_1$ et $4\Omega_2$ (et aussi $4\Omega_3$) et l'on aura

$$\operatorname{sn}(u + 2\Omega_2) = -\operatorname{sn} u.$$

Ces périodes, nous le savons d'avance, ne doivent dépendre que de k^2. Elles peuvent s'exprimer en fonction de k^2 par des intégrales définies. Voici comment.

Nous avons trouvé (2e partie, ch. II, 24) pour expressions des moitiés des périodes de $\wp u$ en fonction de e_1, e_2, e_3

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad \omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

où

$$\mathrm{Z} = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Or z représente ici $\wp u$ (*loc. cit.*). Si nous introduisons une variable x représentant $\operatorname{sn} u$, elle sera liée à z par la relation

$$x = \frac{1}{\sqrt{z + \dfrac{1 + k^2}{3}}};$$

d'où $z = e_1 + \dfrac{1}{x^2}$. En remplaçant z par cette dernière valeur et dz par $-\dfrac{2}{x^3}\, dx$, on trouve

$$\frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Aux valeurs e_1, e_2, e_3 de z répondent respectivement les valeurs ∞, $\pm\dfrac{1}{k}$, ± 1 de x, comme cela résulte des expressions ci-dessus (56) de e_1, e_2, e_3 en fonction de k.

Les formules qui donnent $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ deviennent alors, si l'on prend pour limites des intégrales les quantités

$$\infty,\ +\frac{1}{k},\ +1$$

par exemple,

$$\Omega_1 = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad \Omega_2 = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad \Omega_3 = \int_{\infty}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

où

$$\mathrm{X} = (1 - x^2)(1 - k^2x^2).$$

Telles sont les formules qui permettent de calculer les périodes de $\operatorname{sn} u$ en fonction du module k.

La détermination du radical $\sqrt{\mathrm{X}}$ est arbitraire, mais la même dans les trois formules. Ceci prouve que la fonction $\operatorname{sn} u$, que nous savons être complètement déterminée quand k^2 est donné, ne change pas quand on change simultanément les signes des périodes. Ceci n'est du reste qu'un cas particulier d'une proposition que nous démontrerons tout à l'heure (60).

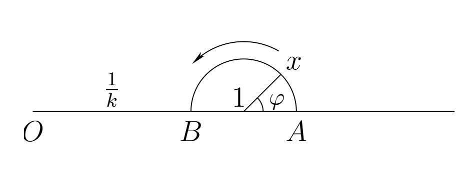
60. *Cas où le module est réel.* — Ce cas est particulièrement intéressant. Il y a alors une période réelle et une période purement imaginaire ; ces deux périodes sont perpendiculaires l'une sur l'autre, et le réseau des périodes est rectangulaire.

Nous pouvons supposer k positif, puisqu'on ne donne que k^2. Admettons pour fixer les idées que k est plus grand que 1 ; le point $\dfrac{1}{k}$ est situé entre l'origine 0 et le point 1. On intègre le long de l'axe des quantités réelles. Le radical $\sqrt{\mathrm{X}}$ est imaginaire entre $x = \dfrac{1}{k}$ et $x = 1$, réel

de $x = 1$ à $x = +\infty$. Par suite Ω_2 est réel et Ω_1 purement imaginaire, comme nous l'avions annoncé.

Mais pour calculer Ω_1 et Ω_2 il faut savoir quelle détermination du radical $\sqrt{\mathrm{X}}$ on doit prendre. Entre les limites 1 et ∞, prenons par exemple la détermination positive. Entre 1 et $\dfrac{1}{k}$ le radical a deux déterminations $\pm i\sqrt{(1-x^2)(k^2x^2-1)}$. Laquelle choisir ?

Pour le décider, marquons sur l'axe des quantités réelles deux points A et B équidistants du point 1, le second situé entre 1 et $\dfrac{1}{k}$. Décrivons sur AB comme diamètre un demi-cercle dans la partie supérieure du plan de la variable x et supposons que le point x parti de A arrive en B après avoir décrit ce demi-cercle.



Pendant ce demi-tour, le radical

$$\sqrt{\mathrm{X}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)(k^2x^2-1)}$$

doit prendre une succession de valeurs continues. Si les deux points A et B sont infiniment rapprochés, ces valeurs seront infiniment peu différentes. Par conséquent le facteur $\sqrt{(x+1)(k^2x^2-1)}$, réel et positif en A, est resté réel et positif en B. Il suffit donc de savoir ce qu'est devenu le facteur $\sqrt{x-1}$.

Or, si ρ désigne le rayon du demi-cercle, nous pouvons poser

$$x - 1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

l'angle polaire φ étant nul en A et égal à π au point B ; par conséquent

$$\sqrt{x-1} = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour $\varphi = 0$, $\sqrt{x-1}$ est égal à $\rho^{\frac{1}{2}}$, et, pour $\varphi = \pi$, à $+i\rho^{\frac{1}{2}}$. C'est donc la détermination

$$+i\sqrt{(1-x^2)(k^2x^2-1)}$$

qu'il faut prendre dans l'intégration de $\dfrac{1}{k}$ à 1 qui fournit Ω_1.

61. Théorème. — *La fonction* $\operatorname{sn} u$ *est déterminée quand on donne le rapport de ses périodes.*

Donnons-nous en effet le rapport $\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = \tau$.

Nous savons que toute fonction $\operatorname{sn} u$ dérive d'une fonction $\wp u$ assujettie à la condition $e_3 - e_1 = 1$. D'ailleurs les périodes de $\operatorname{sn} u$ étant $2\Omega_1, 4\Omega_2$, celles de cette fonction $\wp u$ sont $2\Omega_1, 2\Omega_2$. On doit donc avoir, en se rappelant la définition des quantités e_1, e_3,

$$\wp\Omega_3 - \wp\Omega_1 = 1, \qquad \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \tau.$$

Or $\wp u$ est une fonction homogène de degré -2 de l'argument u et des deux périodes Ω_1, Ω_2 (2e partie, ch. I, 16). Si donc on changeait Ω_1, Ω_2 en $\mu\Omega_1, \mu\Omega_2$ $\left(\text{ce qui donne toutes les solutions de l'équation } \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = \tau\right)$, on aurait

$$\wp(\mu\Omega_3) - \wp(\mu\Omega_1) = \frac{1}{\mu^2}.$$

Il n'y a que les valeurs $\mu = \pm 1$ qui satisfassent à la condition $e_3 - e_1 = 1$. Donc une seule fonction $\wp u$ peut répondre à la question et par suite une seule fonction $\operatorname{sn} u$.

62. *Pôles et zéros de* $\operatorname{sn} u$. — La fonction $\operatorname{sn} u$ étant un cas particulier de $\sigma_{01} u$, les pôles de $\operatorname{sn} u$ sont (53) les points

$$u = \Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Ces pôles sont simples. Il n'y en a que deux dans chaque parallélogramme des périodes. Ω_1 et $\Omega_1 + 2\Omega_2$ sont deux pôles distincts.

Il suit de là que $\operatorname{sn} u$ est une fonction elliptique d'ordre 2.

Les zéros de $\operatorname{sn} u$ sont simples. Ce sont les points

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Il y en a deux dans chaque parallélogramme des périodes ; 0 et $2\Omega_2$ sont deux zéros distincts.

CHAPITRE III

LES FONCTIONS $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

63. *Définitions de* $\operatorname{cn} u$ *et de* $\operatorname{dn} u$. — Quand on prend pour base de la théorie des fonctions elliptiques la fonction $\operatorname{sn} u$, on est obligé, pour la simplicité et la symétrie des formules, de lui adjoindre deux autres fonctions elliptiques, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$, que nous allons définir : c'est ainsi qu'en trigonométrie on est conduit par la même raison à associer au sinus une autre ligne trigonométrique, le cosinus. Cette obligation de faire marcher de front l'étude des trois fonctions sn, cn, dn constitue un désavantage des anciennes fonctions elliptiques, quand on les compare à $\wp u$.

Nous définirons $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ par les relations

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u},$$
$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

complétées par les conditions

$$\operatorname{cn} 0 = +1,$$
$$\operatorname{dn} 0 = +1.$$

Nous allons montrer que $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{dn} u$ *sont des fonctions uniformes de* u. En effet, puisque $\operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}$, $\wp u$ étant assujettie à la condition $e_3 - e_1 = 1$, nous aurons

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \frac{1}{\wp u - e_1}} = \frac{\sqrt{\wp u - e_1 - 1}}{\sqrt{\wp u - e_1}} = \frac{\sqrt{\wp u - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_1}},$$
$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\wp u - e_1}} = \frac{\sqrt{\wp u - e_1 - k^2}}{\sqrt{\wp u - e_1}} = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_1}},$$

et par suite

$$\operatorname{cn} u = \frac{\sigma_{01} u}{\sigma_{03} u},$$
$$\operatorname{dn} u = \frac{\sigma_{01} u}{\sigma_{02} u}.$$

Comme $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ sont des fonctions uniformes de u, la proposition se trouve établie.

Les deux dernières formules, jointes à $\operatorname{sn} u = \sigma_{01} u$, montrent que $\operatorname{sn} u$ est une fonction impaire et que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont des fonctions paires, puisque $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ sont impaires (3e partie, ch. I, 52).

N'oublions pas que les fonctions $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ qui figurent ici ne sont pas les plus générales, à cause de la condition $e_3 - e_1 = 1$.

64. *Périodes de* $\operatorname{dn} u$ *et de* $\operatorname{cn} u$. — Reportons-nous au tableau des périodes et demi-périodes des trois fonctions $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ (55).

1° La fonction $\operatorname{cn} u$ a pour périodes $2\Omega_2, 4\Omega_1, 4\Omega_3$. En effet

$$\operatorname{cn}(u + 2\Omega_2) = \frac{\sigma_{01}(u + 2\Omega_2)}{\sigma_{03}(u + 2\Omega_2)} = \frac{-\sigma_{01} u}{-\sigma_{03} u} = \frac{\sigma_{01} u}{\sigma_{03} u} = \operatorname{cn} u.$$

D'autre part

$$\operatorname{cn}(u + 2\Omega_1) = \frac{\sigma_{01}(u + 2\Omega_1)}{\sigma_{03}(u + 2\Omega_1)} = \frac{\sigma_{01} u}{-\sigma_{03} u} = -\operatorname{cn} u.$$

Ainsi $2\Omega_1$ est une demi-période de $\operatorname{cn} u$; on montrerait qu'il en est de même de $2\Omega_3$. Donc $\operatorname{cn} u$ a pour périodes $4\Omega_1, 4\Omega_3$.

2° La fonction $\operatorname{dn} u$ a pour périodes $2\Omega_3, 4\Omega_2$ et $4\Omega_1$. Démonstration analogue ; $2\Omega_2$ et $2\Omega_1$ sont des demi-périodes.

65. *Pôles et zéros de* $\operatorname{cn} u$ *et de* $\operatorname{dn} u$. — Les pôles de $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ sont les mêmes que ceux de $\operatorname{sn} u$.

En effet, si l'on se reporte au tableau du n° 56, on constate que les pôles de $\sigma_{03} u$ et $\sigma_{02} u$ sont différents des pôles de $\sigma_{01} u$. Donc les deux

fonctions $\operatorname{cn} u = \dfrac{\sigma_{01} u}{\sigma_{03} u}$, $\operatorname{dn} u = \dfrac{\sigma_{01} u}{\sigma_{02} u}$ admettront tous les pôles de $\sigma_{01} u$ c'est-à-dire de $\operatorname{sn} u$, savoir

$$u = \Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Ces pôles sont simples.

Elles n'en admettront pas d'autres. Car elles ne pourraient plus avoir comme pôles, l'une que les zéros de $\sigma_{03} u$, l'autre que ceux de $\sigma_{02} u$. Ces zéros, communs aux trois fonctions $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$, sont les points $2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$. Or $2\Omega_1, 2\Omega_2$ étant des périodes ou des demi-périodes de $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2) &= \pm \operatorname{cn} 0 = \pm 1, \\ \operatorname{dn}(2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2) &= \pm \operatorname{dn} 0 = \pm 1. \end{aligned}$$

Quant aux zéros de $\operatorname{cn} u$ et de $\operatorname{dn} u$, ils ne peuvent être les zéros de $\sigma_{01} u$, puisque ceux-ci donnent à $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ les valeurs ± 1.

Ce seront donc : pour $\operatorname{cn} u$ les pôles de $\sigma_{03} u$ (qui en effet sont distincts de ceux de $\sigma_{01} u$), et pour $\operatorname{dn} u$ les pôles de $\sigma_{02} u$.

Par suite, les zéros de $\operatorname{cn} u$ sont les points

$$u = \Omega_3 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Les zéros de $\operatorname{dn} u$ sont

$$u = \Omega_2 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Tous ces zéros sont simples.

De ce qui précède, on conclut aisément que $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ n'ont chacune que deux pôles distincts, ce sont donc des fonctions elliptiques du second ordre. Remarquons bien que $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ n'ont pas le même parallélogramme des périodes.

66. *Tableau des périodes, demi-périodes, pôles et zéros de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. — Rappelons que nous appelons *demi-période* d'une fonction elliptique toute quantité qui, ajoutée à l'argument, ne fait que changer le signe de la fonction.

Fonction	Demi-périodes	Périodes	Pôles	Zéros
$\mathrm{sn}\, u$	$2\Omega_2, 2\Omega_3$	$2\Omega_1, 4\Omega_2, 4\Omega_3$	$\Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$	$2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$
$\mathrm{cn}\, u$	$2\Omega_3, 2\Omega_1$	$2\Omega_2, 4\Omega_3, 4\Omega_1$	»	$\Omega_3 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$
$\mathrm{dn}\, u$	$2\Omega_1, 2\Omega_2$	$2\Omega_3, 4\Omega_1, 4\Omega_2$	»	$\Omega_2 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$

CHAPITRE IV

DÉRIVÉES DE $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. — DÉGÉNÉRESCENCES.

67. *Dérivées de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. — Reportons-nous à l'équation qui lie $\operatorname{sn} u$ et sa dérivée $\operatorname{sn}' u$ (58) et à celles qui définissent $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ (63). Nous en conclurons immédiatement

$$(\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$
$$\operatorname{sn}' u = + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Nous devons affecter le second membre du signe $+$ et non du signe $-$; car, pour $u = 0$, le produit $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ se réduit à $+1$. D'autre part, $\operatorname{sn} u$ étant par définition égal à $\dfrac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}$, nous aurons

$$\operatorname{sn}' u = -\frac{1}{2} \frac{\wp' u}{(\sqrt{\wp u - e_1})^3} = -\frac{1}{2} \frac{-\dfrac{2}{u^3} + \dots}{\left(\dfrac{1}{u} + \dots\right)^3},$$

car le radical $\sqrt{\wp u - e_1}$ a la valeur principale $+\dfrac{1}{u}$ pour u infiniment petit (3[e] partie, ch. I, 51).

La valeur de $\operatorname{sn}' u$ pour $u = 0$ est donc $+1$.

Pour avoir la dérivée de $\operatorname{cn} u$, il suffit maintenant de différentier

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u},$$

ce qui donne

$$\operatorname{cn}' u = \frac{-\operatorname{sn} u \ \operatorname{sn}' u}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}} = \frac{-\operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$

ou

$$\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

Enfin la dérivée de $\operatorname{dn} u$ s'obtient en différentiant

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u};$$

donc

$$\operatorname{dn}' u = \frac{-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}' u}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \frac{-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u}$$

ou

$$\operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Le système des trois équations différentielles

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

avec les données initiales

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{cn} 0 = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = 1,$$

pourrait servir à définir *a priori* les trois fonctions $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$.

On voit sans peine qu'il est équivalent au système

$$(\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$
$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}.$$

68. *Développements de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ *en série de Maclaurin.* — Les trois formules précédentes qui donnent $\operatorname{sn}' u, \operatorname{cn}' u, \operatorname{dn}' u$ en fonction de $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ peuvent être différentiées indéfiniment, et donnent de proche en proche les valeurs des dérivées d'ordre quelconque en fonction de $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. Si l'on fait alors $u = 0$, et par suite $\operatorname{sn} u = 0$, $\operatorname{cn} u = 1$,

$\operatorname{dn} u = 1$, on aura les coefficients des développements des trois fonctions suivant les puissances de u. On trouve ainsi

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1+k^2}{6} u^3 + \dots,$$
$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2} u^2 + \dots,$$
$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2}{2} u^2 + \dots.$$

L'aspect de ces développements confirme le fait que $\operatorname{sn} u$ est une fonction impaire, et que $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ sont des fonctions paires (63).

69. *Dégénérescences de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. — L'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

à laquelle satisfait $\operatorname{sn} u$, fait immédiatement connaître les dégénérescences de $\operatorname{sn} u$, et par suite celles de $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$, dans les deux cas limites $k = 0$ et $k = \pm 1$.

1° Si $k = 0$, cette équation donne $x = \sin u$ sans constante d'intégration, car x doit s'annuler en même temps que u. Ainsi $\operatorname{sn} u$ dégénère en $\sin u$; par suite $\operatorname{cn} u$ en $\cos u$, et $\operatorname{dn} u$ se réduit à 1.

2° Si $k = \pm 1$, l'intégration donne

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x},$$

d'où

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \operatorname{tang h} u.$$

Donc $\operatorname{sn} u$ dégénère en $\operatorname{tang h} u$, et par conséquent $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ en

$$\sqrt{1 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)^2} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{\cos \mathrm{h}\, u}.$$

CHAPITRE V

ADDITION DES ARGUMENTS. — ÉQUATION D'EULER. MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT DES FONCTIONS $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$.

70. *Expression de* $\operatorname{sn}(u+v)+\operatorname{sn}(u-v)$ *en fonction rationnelle de* $\operatorname{sn} u$. — Pour rester fidèle à l'esprit de notre méthode, nous devrions déduire la formule qui donne $\operatorname{sn}(u+v)$ en fonction de $\operatorname{sn} u, \operatorname{sn} v, \operatorname{cn} u, \operatorname{cn} v, \operatorname{dn} u, \operatorname{dn} v$, de celle qui fournit l'expression de $\wp(u+v)$ au moyen de $\wp u, \wp v, \wp' u, \wp' v$ (2e partie, ch. V, 41). Ce calcul étant pénible, nous préférons employer les considérations assez simples que voici.

Cherchons s'il est possible d'exprimer rationnellement au moyen de $\operatorname{sn} u$ la fonction

$$f(u) = \operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn}(u-v).$$

Elle admet comme $\operatorname{sn} u$ les périodes $2\Omega_1, 4\Omega_2$. Les pôles, simples comme ceux de $\operatorname{sn} u$, sont donnés par la formule

$$u = \mp v + \Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Les pôles distincts sont au nombre de quatre, par exemple

$$-v+\Omega_1, \quad -v+\Omega_1+2\Omega_2, \quad +v+\Omega_1, \quad +v+\Omega_1+2\Omega_2.$$

La fonction elliptique $f(u)$ est donc du 4e ordre.

Il est facile de former une fonction rationnelle de $\operatorname{sn} u$ aux mêmes périodes et aux mêmes pôles que $f(u)$. La plus simple possible est

$$\varphi(u) = \frac{1}{\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}(-v+\Omega_1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}(v+\Omega_1)}.$$

En effet, la fonction $\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}(-v+\Omega_1)$ étant, comme $\operatorname{sn} u$, du second ordre, admet deux zéros distincts ; l'un est évidemment $u = -v+\Omega_1$, l'autre est

$$u = -v + \Omega_1 + 2\Omega_2,$$

car $2\Omega_2$ étant une demi-période, on a

$$\operatorname{sn}(-v + \Omega_1 + 2\Omega_2) = -\operatorname{sn}(+v - \Omega_1) = +\operatorname{sn}(-v + \Omega_1).$$

De même $\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}(v + \Omega_1)$ admet les zéros $v + \Omega_1, v + \Omega_1 + 2\Omega_2$.

De là résulte que $\varphi(u)$ admet les mêmes pôles que $f(u)$.

Ces pôles étant simples, le quotient $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$ ne peut admettre d'autres pôles que les zéros de $\varphi(u)$ et d'autres zéros que les zéros de $f(u)$.

Étudions maintenant ce quotient. Nous allons montrer qu'il a mêmes zéros et mêmes pôles que $\operatorname{sn} u$.

1° *Pôles de* $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$. — L'expression de $\varphi(u)$ peut s'écrire

$$\varphi(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(v + \Omega_1)},$$

car

$$\begin{aligned} -\operatorname{sn}(-v + \Omega_1) &= -\operatorname{sn}(-v + \Omega_1 - 2\Omega_1) \\ &= -\operatorname{sn}(-v - \Omega_1) = +\operatorname{sn}(v + \Omega_1). \end{aligned}$$

Les zéros de $\varphi(u)$ sont les pôles de $\operatorname{sn}^2 u$. Ces pôles sont les mêmes que ceux de $\operatorname{sn} u$, savoir

$$\Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2;$$

seulement ils sont doubles.

D'autre part, $f(u)$ admet les zéros

$$\Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2,$$

dont deux seulement, par exemple Ω_1 et $\Omega_1 + 2\Omega_2$, sont distincts, car

$$\begin{aligned} f(\Omega_1) = \operatorname{sn}(\Omega_1 + v) + \operatorname{sn}(\Omega_1 - v) &= \operatorname{sn}(\Omega_1 + v) - \operatorname{sn}\bigl[2\Omega_1 - (\Omega_1 - v)\bigr] \\ &= \operatorname{sn}(\Omega_1 + v) - \operatorname{sn}(\Omega_1 + v) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\Omega_1 + 2\Omega_2) &= \operatorname{sn}(\Omega_1 + 2\Omega_2 + v) + \operatorname{sn}(\Omega_1 + 2\Omega_2 - v) \\ &= -\operatorname{sn}(\Omega_1 + v) - \operatorname{sn}(\Omega_1 - v) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $f(u)$ admet pour zéros les pôles de $\varphi(u)$. Ces zéros étant simples, tandis que ces pôles sont doubles, $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$ admet pour pôles simples les points $\Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$, qui sont précisément les pôles de $\operatorname{sn} u$.

2° *Zéros de* $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$. — Ces zéros, nous l'avons dit, ne peuvent être que des zéros de $f(u)$. Ceux-ci sont au nombre de quatre distincts, puisque $f(u)$ est une fonction elliptique du quatrième ordre. Nous en connaissons déjà deux, Ω_1 et $\Omega_1 + 2\Omega_2$ qui, nous venons de le voir, n'annulent pas $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$. Vérifions directement que les deux autres sont les zéros distincts de $\operatorname{sn} u$, savoir 0 et $2\Omega_2$. En effet

$$f(0) = \operatorname{sn} v + \operatorname{sn}(-v) = 0,$$
$$f(2\Omega_2) = \operatorname{sn}(2\Omega_2 + v) + \operatorname{sn}(2\Omega_2 - v) = -\operatorname{sn} v - \operatorname{sn}(-v) = 0.$$

La fonction elliptique $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$, ayant mêmes périodes, mêmes zéros et mêmes pôles que $\operatorname{sn} u$ avec le même degré 1 de multiplicité, est proportionnelle à $\operatorname{sn} u$:

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \mathrm{C} \operatorname{sn} u.$$

On a donc, en remplaçant $f(u), \varphi(u)$ par leurs valeurs,

$$\operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn}(u-v) = \frac{\mathrm{C} \operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(v + \Omega_1)}.$$

Nous déterminerons tout à l'heure la constante C, mais il importe d'abord d'exprimer $\operatorname{sn}(v + \Omega_1)$ en fonction de $\operatorname{sn} v$.

Les pôles de $\operatorname{sn}(v + \Omega_1)$ sont donnés par la formule

$$v + \Omega_1 = \Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2,$$

d'où

$$v = 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2;$$

ses zéros par la formule

$$v + \Omega_1 = 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2,$$

d'où

$$v = -\Omega_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2 = \Omega_1 + 2m'_1\Omega_1 + 2m'_2\Omega_2.$$

Ainsi $\operatorname{sn}(v + \Omega_1)$ a pour pôles les zéros et pour zéros les pôles de $\operatorname{sn} v$; donc

$$\operatorname{sn}(v + \Omega_1) = \frac{\mathrm{A}}{\operatorname{sn} v}.$$

Pour déterminer la constante A, faisons $\operatorname{sn} v = 1$, d'où $\operatorname{cn} v = 0$, relation vérifiée par $v = \Omega_3$ (66) ; il viendra

$$\mathrm{A} = \operatorname{sn}(\Omega_3 + \Omega_1) = \operatorname{sn}(-\Omega_2) = -\operatorname{sn}(\Omega_2),$$

mais l'on a (66) $\operatorname{dn} \Omega_2 = 0$, c'est-à-dire $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \Omega_2 = 0$, par conséquent

$$\mathrm{A}^2 = \operatorname{sn}^2 \Omega_2 = \frac{1}{k^2}$$

et

$$\operatorname{sn}^2(v + \Omega_1) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 v}.$$

Substituant dans la formule qui donne $\operatorname{sn}(u + v) + \operatorname{sn}(u - v)$, on a

$$\operatorname{sn}(u + v) + \operatorname{sn}(u - v) = \frac{\mathrm{C} \operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}^2 u - \dfrac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 v}} = \frac{\mathrm{C}' \operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Pour déterminer C' (qui ne dépend que de v), prenons les dérivées des deux membres par rapport à u, et faisons $u = 0$; en tenant compte de ce que $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ sont des fonctions impaires, nous obtiendrons facilement

$$\mathrm{C}' = 2 \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v.$$

Finalement

$$\operatorname{sn}(u+v)+\operatorname{sn}(u-v)=\frac{2\operatorname{sn}u\ \operatorname{cn}v\ \operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v}.$$

71. *Addition des arguments pour les fonctions* sn, cn, dn. — Si nous ajoutons à l'équation précédente celle qu'on en déduit en y changeant u en v et v en u, on obtient la *formule d'addition des arguments* pour la fonction sn

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\ \operatorname{cn}v\ \operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\ \operatorname{cn}u\ \operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v}.$$

On en conclut aisément celle qui donne $\operatorname{cn}(u+v)$. On a en effet

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}^2(u+v)&=1-\operatorname{sn}^2(u+v)\\&=\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v)^2-(\operatorname{sn}u\ \operatorname{cn}v\ \operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\ \operatorname{cn}u\ \operatorname{dn}u)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v)^2}.\end{aligned}$$

Or

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v=\operatorname{cn}^2u+\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{dn}^2v=\operatorname{cn}^2v+\operatorname{sn}^2v\ \operatorname{dn}^2u.$$

Si l'on remplace au numérateur $(1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v)^2$ par

$$(\operatorname{cn}^2u+\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{dn}^2v)(\operatorname{cn}^2v+\operatorname{sn}^2v\ \operatorname{dn}^2u),$$

ce numérateur prendra la forme $(\operatorname{cn}u\ \operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\ \operatorname{dn}u\ \operatorname{sn}v\ \operatorname{dn}v)^2$. Extrayant la racine carrée, on aura la formule cherchée

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn}u\ \operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\ \operatorname{dn}u\ \operatorname{sn}v\ \operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\ \operatorname{sn}^2v}.$$

Il faut prendre le signe $+$ devant les deux membres pour qu'ils deviennent identiques si l'on y fait $v=0$.

On vérifiera de même l'expression de $\operatorname{dn}(u+v)$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \ \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \ \operatorname{sn} v \ \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \ \operatorname{sn}^2 v}.$$

72. *Équation d'Euler.* — La formule d'addition pour la fonction sn donne le moyen d'intégrer immédiatement l'équation différentielle d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Posons

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = du; \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = dv.$$

Nous satisfaisons à ces deux dernières équations différentielles en prenant

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad y = \operatorname{sn} v.$$

Par la substitution des variables u, v aux variables x, y, l'équation d'Euler devient $du + dv = 0$, d'où

$$u + v = \text{const.}, \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \text{C}.$$

Remplaçons $\operatorname{sn}(u+v)$ par sa valeur ci-dessus (71) et remarquons que

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} u &= \sqrt{1-x^2}, & \operatorname{dn} u &= \sqrt{1-k^2x^2}, \\ \operatorname{cn} v &= \sqrt{1-y^2}, & \operatorname{dn} v &= \sqrt{1-k^2y^2}; \end{aligned}$$

il vient

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = \text{C}.$$

Donc *l'intégrale générale de l'équation d'Euler est algébrique.* Ce résultat est bien remarquable si l'on songe que l'intégrale de l'équation plus simple

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = du$$

est transcendante ; cette intégrale est

$$x = \operatorname{sn}(u + \mathrm{C}).$$

73. *Multiplication de l'argument de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. — Si, dans les formules (71) qui donnent $\operatorname{sn}(u+v), \operatorname{cn}(u+v), \operatorname{dn}(u+v)$, on fait $v = u$, on trouve

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \ \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \qquad \ldots.$$

Ainsi $\operatorname{sn} 2u, \operatorname{cn} 2u, \operatorname{dn} 2u$ s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$.

Il en est de même de $\operatorname{sn} mu, \operatorname{cn} mu, \operatorname{dn} mu$; et l'on obtiendra de proche en proche les expressions de ces fonctions en faisant v égal successivement à $2u, 3u, \ldots$ dans les formules d'addition.

QUATRIÈME PARTIE

LES FONCTIONS θ

CHAPITRE I

LA FONCTION θ. — EXPRESSIONS DE $\wp u, \zeta u, \sigma u$ AU MOYEN DE CETTE FONCTION.

En partant des périodes comme données, nous avons formé les expressions de $\wp u, \zeta u, \sigma u$ (2[e] partie, ch. I, 15 ; ch. III, 26, 28). Ces expressions qui sont des séries à double entrée ne sont évidemment pas commodes pour calculer ces fonctions. Mais l'introduction des quatre fonctions $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ de Jacobi va nous fournir le moyen le plus pratique pour exécuter ce calcul.

74. *Construction de la fonction θu.* — Il est facile, en partant de σu, de construire une fonction entière simplement périodique θu, de demi-période $2\omega_1$, c'est-à-dire telle que $\theta(u + 2\omega_1) = -\theta u$.

Posons en effet

$$\theta u = \varphi(u)\, \sigma u,$$

d'où (2[e] partie, ch. III, 32)

$$\theta(u + 2\omega_1) = -\theta u = -\varphi(u + 2\omega_1)\, e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\, \sigma u.$$

La comparaison entre cette équation et la précédente montre que l'on doit avoir

$$\varphi(u + 2\omega_1) = e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}\, \varphi(u).$$

La manière la plus simple de choisir $\varphi(u)$ de façon à satisfaire à cette condition est de prendre

$$\varphi(u) = \frac{1}{\mathrm{A}}\, e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}},$$

A étant une constante. Par suite

$$\mathrm{A}\, \theta u = e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\, \sigma u.$$

La fonction A θu étant entière, périodique, de période $4\omega_1$ (puisqu'elle admet la demi-période $2\omega_1$), est développable en série de Fourier :

$$\mathrm{A}\theta u = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_m\, e^{m\,\frac{2\pi i u}{4\omega_1}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_m\, e^{m\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

Déterminons les coefficients A_m.

D'abord nous savons que θu change de signe quand on accroît u de $2\omega_1$. Chacun des termes du développement est alors multiplié par

$$e^{m\,\frac{\pi i 2\omega_1}{2\omega_1}} = e^{m\pi i} = \begin{cases} +1 & \text{si } m \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il suffit donc que les coefficients des termes où m est pair soient nuls, et cela est nécessaire comme on le démontre dans la théorie de la série de Fourier. Le développement se réduit par suite à

$$\mathrm{A}\,\theta u = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_{2n+1}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

En second lieu examinons l'effet sur θu du changement de u en $u+2\omega_2$. Ce changement multipliant σu par $-e^{+2\eta_2(u+\omega_2)}$ (2e partie, ch. III, 28), on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,\theta(u+2\omega_2) &= -e^{-\eta_1\,\frac{(u+2\omega_2)^2}{2\omega_1}} \cdot e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\,\sigma u \\ &= -e^{2(\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2)\,\frac{u+\omega_2}{\omega_1}}\; e^{-\eta_1\,\frac{u^2}{2\omega_1}}\,\sigma u. \end{aligned}$$

C'est ici que nous utilisons l'importante relation (2e partie, ch. III, 29)

$$2(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = \pi i.$$

N'oublions pas qu'elle suppose que la partie imaginaire du rapport $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ est positive (sinon le second membre serait égal à $-\pi i$).

Cette relation nous donne

$$\theta(u+2\omega_2) = -e^{-\pi i\,\frac{u+\omega_2}{\omega_1}}\,\theta u.$$

La propriété de la fonction θ de se reproduire multipliée par l'exponentielle $-e^{-\pi i\,\frac{u+\omega_2}{\omega_1}}$ détermine tous les coefficients de son développement. On a, en effet, d'une part,

$$\mathrm{A}\,\theta(u+2\omega_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_{2n-1}\,e^{\pi i\,\frac{(u+2\omega_2)}{2\omega_1}\,(2n-1)},$$

d'autre part,

$$-e^{-\pi i\,\frac{u+\omega_2}{\omega_1}}\,\mathrm{A}\,\theta u = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_{2n+1}\,e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}\,(2n+1)-\pi i\,\frac{u+\omega_2}{\omega_1}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{A}_{2n+1}\,e^{\pi i\,\frac{u+2\omega_2}{2\omega_1}\,(2n-1)}\,e^{-2n\pi i\,\frac{\omega_2}{\omega_1}}.$$

Nous avons là deux séries de Fourier qui doivent être identiques : on sait qu'alors ceux de leurs termes où l'argument $\dfrac{\pi i u}{2\omega_1}$ est affecté du même multiple entier doivent être égaux. On en conclut

$$\mathrm{A}_{2n-1} = -\mathrm{A}_{2n+1}\,e^{-2n\pi i\,\frac{\omega_2}{\omega_1}}.$$

Si, pour abréger, on pose

$$q = e^{\pi i\,\frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{2n+1} &= -\mathrm{A}_{2n-1}\,q^{2n} = +\mathrm{A}_{2n-3}\,q^{2n+2(n-1)} = \dots \\
&= (-1)^n \mathrm{A}_1\,q^{2[n+(n-1)+\cdots+1]} \\
&= (-1)^n \mathrm{A}_1\,q^{\frac{2n(n+1)}{2}} = (-1)^n \mathrm{A}_1\,q^{-\frac{1}{4}} \cdot q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Prenons A_1 égal à $-iq^{\frac{1}{4}}$; il en résultera

$$A_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{i}\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

La série θu est dès lors complètement déterminée, et son expression définitive est

$$\theta u = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

75. *Expressions de $\sigma u, \zeta u, \wp u$ en fonction de θu.*

1° Pour avoir σu en fonction de θu, il suffit de déterminer A dans la formule (74)

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\, \sigma u = \mathrm{A}\, \theta u.$$

Pour déterminer A, développons en série de Maclaurin les trois fonctions $e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$, σu (2e partie, ch. III, 31) et θu, nous aurons

$$\left(1 - \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{\eta_1^2 u^4}{4\omega_1^2} - \dots\right) .\, u(1 + d_1 u^4 + \dots) \\ = \mathrm{A}\left(\theta 0 + u\theta' 0 + \frac{u^2}{1\,.\,2}\theta'' 0 + \frac{u^3}{1\,.\,2\,.\,3}\theta''' 0 + \dots\right).$$

L'identification donne

$$\theta 0 = 0, \quad \mathrm{A}\,\theta' 0 = 1, \quad \theta'' 0 = 0, \quad \frac{\mathrm{A}\,\theta''' 0}{6} = -\frac{\eta_1}{2\omega_1}, \quad \dots$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\theta' 0}, \qquad \frac{\eta_1}{2\omega_1} = -\frac{1}{6}\,\frac{\theta''' 0}{\theta' 0};$$

et nous avons l'expression cherchée de σu

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\, \frac{\theta u}{\theta' 0} = e^{-\frac{1}{6}\,\frac{\theta''' 0}{\theta' 0}\, u^2}\, \frac{\theta u}{\theta' 0}.$$

2° En prenant la dérivée logarithmique de cette expression, on trouve

$$\zeta u = -\frac{1}{3}\,\frac{\theta'''0}{\theta'0}\,u + \frac{\theta' u}{\theta u}.$$

3° Différentions cette dernière formule et changeons les signes des deux membres ; nous aurons

$$\wp u = \frac{1}{3}\,\frac{\theta'''0}{\theta'0} - \frac{\theta u\,\theta'' u - \theta'^2 u}{\theta^2 u}.$$

Ces trois expressions de $\sigma u, \zeta u, \wp u$ résolvent le problème que nous nous étions proposé, de calculer ces trois fonctions en les représentant par des séries simples. Toutefois la dernière formule n'est pas très favorable au calcul de $\wp u$. Nous en obtiendrons de plus appropriées au même objet en introduisant, après Jacobi, trois nouvelles séries $\theta_1 u, \theta_2 u, \theta_3 u$ très analogues à θu. Ces séries sont également utiles pour représenter $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$.

CHAPITRE II

LES FONCTIONS $\theta_1 u, \theta_2 u, \theta_3 u$. EXPRESSIONS DE $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ PAR LES FONCTIONS θ.

76. *Les fonctions $\theta_1 u, \theta_2 u, \theta_3 u$.* — L'étude de θu va nous conduire à ces nouvelles fonctions. Cherchons ce que θu devient quand on augmente l'argument u successivement de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

1° Augmentons u de ω_1. Nous aurons

$$\theta(u+\omega_1) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i(u+\omega_1)}{2\omega_1}}.$$

Or

$$e^{(2n+1)\,\frac{\pi i(u+\omega_1)}{2\omega_1}} = e^{(2n+1)\,\frac{\pi i}{2}}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}} = (-1)^n\, i e^{(2n+1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

Si donc nous posons

$$\theta_1(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

nous aurons

$$\theta(u+\omega_1) = \theta_1 u.$$

2° Augmentons u de ω_2, il vient

$$\theta(u+\omega_2) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\, e^{(2n+1)\,\frac{\pi i(u+\omega_2)}{2\omega_1}}$$

ou bien, si nous changeons n en $n-1$,

$$\theta(u+\omega_2) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\, q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\, e^{(2n-1)\,\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\, e^{(2n-1)\pi i\,\frac{\omega_2}{2\omega_1}}.$$

Mais, en se rappelant (74) que $e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} = q$, on a

$$q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi i \frac{\omega_2}{2\omega_1}} = q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} q^{n-\frac{1}{2}} = q^{n^2} q^{-\frac{1}{4}};$$

par suite

$$\theta(u+\omega_2) = \frac{-1}{i} q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

Si donc on pose

$$\theta u_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

on aura

$$\theta(u+\omega_2) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta_2 u.$$

3° Augmentons u de ω_3 ; θu deviendra

$$\begin{aligned}\theta(u+\omega_3) &= \theta(u-\omega_1-\omega_2) \\ &= \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i(u-\omega_1-\omega_2)}{2\omega_1}}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}e^{(2n+1)\frac{\pi i(u-\omega_1-\omega_2)}{2\omega_1}} &= e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}} e^{-(2n+1)\frac{\pi i}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} \\ &= -(-1)^n iq^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\theta(u+\omega_3) &= -\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \\ &= -q^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$\theta_3 u = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

on aura

$$\theta(u+\omega_3) = -q^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta_3 u.$$

Rapprochons les quatre séries qui représentent $\theta u, \theta_1 u, \theta_2 u, \theta_3 u$, ainsi que les trois relations qui lient la première de ces quatre fonctions aux trois autres :

$$\theta u = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

$$\theta_1 u = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

$$\theta_2 u = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

$$\theta_3 u = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\frac{\pi i u}{2\omega_1}}.$$

$$\theta(u+\omega_1) = \theta_1 u,$$

$$\theta(u+\omega_2) = i q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta_2 u,$$

$$\theta(u+\omega_3) = -q^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta_3 u.$$

Rappelons-nous la signification de q

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}.$$

77. *Expression de $\sigma_{01}u, \sigma_{02}u, \sigma_{03}u$ par les fonctions θ.* — Reportons-nous à la définition (3e partie, ch. I, 51) des fonctions elliptiques

$\sigma_{01}u, \sigma_{02}u, \sigma_{03}u$ qui servent de traits d'union entre $\wp u$ d'une part et $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ de l'autre.

Nous avons d'abord

$$\sigma_{01}u = e^{\eta_1 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_1}{\sigma(u+\omega_1)}.$$

Il n'est pas difficile d'avoir l'expression de $\sigma_{01}u$ au moyen des fonctions θ, puisque nous connaissons celle de σu (75), savoir :

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta u}{\theta' 0}.$$

Nous en concluons

$$\sigma\omega_1 = e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\,\frac{\theta\omega_1}{\theta' 0} = e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\,\frac{\theta_1 0}{\theta' 0},$$
$$\sigma(u+\omega_1) = e^{\frac{\eta_1(u+\omega_1)^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta(u+\omega_1)}{\theta' 0} = e^{\frac{\eta_1(u+\omega_1)^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta_1 u}{\theta' 0}.$$

Donc

$$\sigma_{01}u = \frac{\theta_1 0}{\theta' 0}\,\frac{\theta u}{\theta_1 u}.$$

Un calcul peu différent conduirait aux deux autres expressions analogues

$$\sigma_{02}u = \frac{\theta_2 0}{\theta' 0}\,\frac{\theta u}{\theta_2 u},$$
$$\sigma_{03}u = \frac{\theta_3 0}{\theta' 0}\,\frac{\theta u}{\theta_3 u}.$$

Pour obtenir la dernière par exemple, il suffit de se reporter (55) à la formule

$$\sigma_{03}u = e^{\eta_3 u}\,\frac{\sigma u\,\sigma\omega_3}{\sigma(u+\omega_3)},$$

et d'y substituer la valeur ci-dessus de σu en fonction de θu, ainsi que les valeurs suivantes qu'on en déduit :

$$\sigma\omega_3 = e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta\omega_3}{\theta'0} = -e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\frac{\theta_3 0}{\theta'0},$$
$$\sigma(u+\omega_3) = e^{\frac{\eta_1(u+\omega_3)^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta(u+\omega_3)}{\theta'0} = -e^{\frac{\eta_1(u+\omega_3)^2}{2\omega_1}}\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\,\frac{\theta_3 u}{\theta'0}.$$

Il vient ainsi

$$\sigma_{03}u = e^{\eta_3 u}\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}\,e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\,e^{\frac{-\eta_1(u+\omega_3)^2}{2\omega_1}}\,\frac{\theta_3 0}{\theta'0}\,\frac{\theta u}{\theta_3 u};$$

et il est facile de constater que le facteur exponentiel se réduit à l'unité à cause de la relation

$$2(\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3) = \pi i.$$

78. *Expressions de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ *par les fonctions* θ. — Rappelons-nous que $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ dérivent d'une fonction $\wp u$ aux périodes $2\Omega_1, 2\Omega_2$ pour laquelle on a $e_3 - e_1 = 1$ (3[e] partie, ch. II, 57), et que l'on a (3[e] partie, ch. II, 57, et ch. III, 63)

$$\operatorname{sn} u = \sigma_{01}u, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_{01}u}{\sigma_{03}u}, \qquad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_{01}u}{\sigma_{02}u}.$$

Appelons $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ les fonctions $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ dans lesquelles ω_1 et ω_2 sont remplacées par Ω_1, Ω_2, nous aurons ces expressions de $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ par les fonctions Θ

$$\operatorname{sn} u = \frac{\Theta_1 0}{\Theta' 0}\,\frac{\Theta u}{\Theta_1 u},$$
$$\operatorname{cn} u = \frac{\Theta_1 0}{\Theta_3 0}\,\frac{\Theta_3 u}{\Theta_1 u},$$
$$\operatorname{dn} u = \frac{\Theta_1 0}{\Theta_2 0}\,\frac{\Theta_2 u}{\Theta_1 u}.$$

Il ne faut pas oublier que dans ces formules les périodes de $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ sont respectivement : $2\Omega_1$ et $4\Omega_2$; $2\Omega_2$ et $4\Omega_1$; $-2(\Omega_1 + \Omega_2)$ et $4\Omega_1$ (3e partie, ch. III, 66).

CHAPITRE III

CALCUL DE $\wp u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ EN FONCTION DES PÉRIODES.

79. *Calcul de $\wp u$ en fonction des périodes.* — L'expression de $\sigma_{01}u$ par les fonctions θ nous fournit le moyen pratique de calculer $\wp u$ pour chaque valeur de l'argument u, quand on donne les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. On a en effet (3e partie, ch. I, 51)

$$\sigma_{01}u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}},$$

d'où (77)

$$\wp u - e_1 = \left(\frac{\theta'0}{\theta_1 0}\,\frac{\theta_1 u}{\theta u}\right)^2.$$

Comme les fonctions θ ne dépendent que des périodes, on pourra calculer $\wp u$ quand on saura évaluer e_1 en fonction de ω_1, ω_2. C'est un calcul que nous apprendrons à effectuer tout à l'heure (81).

80. *Problème inverse.* — On donne $\wp u$ et l'on propose de calculer les valeurs correspondantes de u.

Soit u_0 l'une d'elles ; toutes les autres ont pour expression

$$u = \pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Or on a les formules analogues à celles du n° précédent,

$$\sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\theta'0}{\theta_2 0}\,\frac{\theta_2 u}{\theta u},$$
$$\sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\theta'0}{\theta_3 0}\,\frac{\theta_3 u}{\theta u}.$$

Divisons-les membre à membre et posons

$$\pm b = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}}\,\frac{\theta_2 0}{\theta_3 0};$$

b sera une quantité connue, si l'on a préalablement calculé e_2, e_3 en fonction de ω_1, ω_2, calcul que nous allons faire tout à l'heure (81).

On aura alors pour déterminer u l'équation transcendante

$$\frac{\theta_2 u}{\theta_3 u} = \pm b \qquad \text{ou} \qquad \frac{\theta_3 u - \theta_2 u}{\theta_3 u + \theta_2 u} = \frac{1 \mp b}{1 \pm b}.$$

Pour la résoudre, il convient de changer de variable et de poser

$$z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}$$

d'où, en se rappelant qu'on a (74) $q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$,

$$z^2 = e^{\pm \frac{\pi i u_0}{\omega_1}}\, e^{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)\frac{\pi i}{\omega_1}} = q^{2m_2}\, e^{\pm \frac{\pi i u_0}{\omega_1}}.$$

Ainsi à chaque valeur de $\wp u$ correspondent une infinité de valeurs de z^2 formant deux progressions géométriques de raison q^2 ; ces valeurs sont deux à deux réciproques l'une de l'autre.

Si dans les fonctions $\theta_2 u, \theta_3 u$, on remplace $e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}$ par z, qu'on groupe les puissances de z égales et de signe contraire, et qu'on divise $\theta_3 - \theta_2$ par $\theta_3 + \theta_2$, on obtient

$$\frac{q\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right) + q^9\left(z^6 + \dfrac{1}{z^6}\right) + \dots}{1 + q^4\left(z^4 + \dfrac{1}{z^4}\right) + \dots} = \frac{1 \mp b}{1 \pm b}.$$

Cette équation a pour racines les valeurs de z en nombre infini formant les deux progressions géométriques dont on vient de parler.

Une première approximation, légitime parce que le module de q est inférieur à 1 (voir 80 *bis*), donne

$$q\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1 \mp b}{1 \pm b}.$$

On a ainsi deux des racines, qu'on calculera d'ailleurs aussi exactement qu'on voudra par approximations successives.

Connaissant l'une des valeurs de z^2, on a la valeur correspondante u_0 de u par l'équation

$$u_0 = \frac{\omega_1}{\pi i} \log z^2,$$

où le signe log désigne une seule des déterminations du logarithme. Les autres valeurs de u sont données par la formule

$$u = \pm \frac{\omega_1}{\pi i} \log z^2 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

80 *bis.* Remarque. — Il importe visiblement, pour la convergence rapide des approximations qui fournissent la valeur de z, que q ait le plus petit module possible. Or $\wp u$ ne change pas quand on substitue aux périodes données des périodes équivalentes, c'est-à-dire conservant les sommets du réseau. Voyons comment il faut choisir ces périodes pour que le module de q soit minimum.

Si τ désigne le rapport des périodes, nous avons (1re partie, ch. I, 4)

$$\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 i}{\alpha_1 + \beta_1 i} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} i = r + si.$$

D'ailleurs

$$q = e^{\pi i \tau}, \qquad \text{mod.}\, q = e^{-\pi s}.$$

Les calculs que nous avons effectués sur les fonctions θ impliquent qu'on ait choisi ω_1 et ω_2 de façon que s, coefficient de la partie imaginaire du rapport des périodes, soit positif ; donc mod. q est plus petit que 1. D'ailleurs $\alpha_1\beta 2 - \alpha_2\beta_1$ désignant l'aire P du parallélogramme des périodes (1re partie, ch. I, 4), on peut écrire

$$s = \frac{\mathrm{P}}{(\text{mod.}\, \omega_1)^2}.$$

Or tous les parallélogrammes formés par des périodes équivalentes étant équivalents (1re partie, ch. I, 5), P est une constante du réseau.

Par suite, pour que mod. q soit le plus petit possible, s devant être le plus grand possible, on devra prendre pour $2\omega_1$ la période de *module minimum*.

81. *Calcul de e_1, e_2, e_3 en fonction des périodes.* — Il nous reste à déterminer en fonction des périodes les trois quantités e_1, e_2, e_3, indispensables, comme nous l'avons vu (79 et 80), pour le calcul de $\wp u$.

Dans la formule du nº 79 qui fournit $\wp u$, nous n'avons qu'à faire successivement $u = \omega_2$, $u = \omega_3$; nous aurons

$$e_2 - e_1 = \left[\frac{\theta'0}{\theta_1 0}\,\frac{\theta_1\omega_2}{\theta\omega_2}\right]^2,$$
$$e_3 - e_1 = \left[\frac{\theta'0}{\theta_1 0}\,\frac{\theta_1\omega_3}{\theta\omega_3}\right]^2.$$

Nous allons transformer ces formules de façon que les symboles θ ne portent que sur l'argument 0.

Pour cela reportons-nous aux formules rassemblées à la fin du nº 76. Dans la formule qui donne $\theta(u + \omega_2)$ faisons $u = 0$, nous aurons

$$\theta\omega_2 = iq^{-\frac{1}{4}}\,\theta_2 0.$$

Dans celle qui donne $\theta_1 u$ faisons $u = \omega_2$, il viendra

$$\theta_1\omega_2 = \sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i\,\frac{\omega_2}{\omega_1}} = q^{-\frac{1}{4}} \sum q^{(n+1)^2} = q^{-\frac{1}{4}}\,\theta_3 0.$$

Dans la formule qui donne $\theta(u+\omega_3)$ (76), faisons $u = 0$, nous trouvons

$$\theta\omega_3 = -q^{-\frac{1}{4}}\,\theta_3 0.$$

Enfin dans celle qui donne $\theta(u + \omega_1)$, faisons $u = \omega_3$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\theta_1\omega_3 = \theta(\omega_3 + \omega_1) &= \theta(-\omega_2)\\ &= \frac{1}{i}\sum(-1)^n\,q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i\,\frac{\omega_2}{\omega_1}}\\ &= \frac{1}{i}\sum(-1)^n\,q^{n^2}\,q^{-\frac{1}{4}} = -iq^{-\frac{1}{4}}\,\theta_2 0.\end{aligned}$$

Les séries $\theta 0, \theta_1 0, \theta_2 0, \theta_3 0$ ne dépendent que de $q = e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}$, c'est-à-dire que du rapport τ des périodes.

Mais $\theta' 0$ dépend à la fois de τ et de ω_1. Pour mettre cette dernière quantité en évidence, appelons ϑu ce que devient la série θu lorsqu'on y fait $2\omega_1 = 1$; il est clair que l'on a

$$\theta' 0 = \frac{1}{2\omega_1} \vartheta' 0,$$

$\vartheta' 0$ ne dépendant que de q.

Les expressions de $e_2 - e_1, e_3 - e_1$ deviennent alors

$$e_2 - e_1 = -\left[\frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta' 0}{\theta_1 0} \frac{\theta_3 0}{\theta_2 0}\right]^2,$$

$$e_3 - e_1 = -\left[\frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta' 0}{\theta_1 0} \frac{\theta_2 0}{\theta_3 0}\right]^2.$$

Jointes à la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, elles permettent de calculer e_1, e_2, e_3 en fonction des périodes.

82. *Calcul de* $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ *en fonction du rapport des périodes.* — Nous avons vu (3[e] partie, ch. II, 59) que $\operatorname{sn} u$ et par suite, $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ ne dépendent que du rapport de leurs périodes. Nous allons le démontrer d'une autre manière et du même coup donner le moyen pratique de calculer ces trois fonctions quand on connaît ce rapport.

Rappelons-nous toujours que ces fonctions dérivent d'une fonction $\wp u$ aux périodes $2\Omega_1, 2\Omega_2$, et telle que $e_3 - e_1 = 1$. Le carré du module k^2 est égal à $e_2 - e_1$ et par suite à $\dfrac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}$. Donc

$$k^2 = \left[\frac{\Theta_3 0}{\Theta_2 0}\right]^4 = \left[\frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}\right]^4.$$

On voit que k^2 ne dépend que du rapport $\tau = \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}$ (puisque $q = e^{\pi i \tau}$). Or nous savons que la connaissance de k^2 suffit pour déterminer $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$.

Maintenant, comme $e_3 - e_1$ est égal à 1, on aura, en extrayant la racine de l'expression ci-dessus de $e_2 - e_1$,

$$\pm i = \frac{1}{2\Omega_1} \frac{\vartheta' 0}{\Theta_1 0} \frac{\Theta_3 0}{\Theta_2 0},$$

relation qui donnera Ω_1 en fonction de q, c'est-à-dire de τ. On peut prendre indifféremment l'une ou l'autre des déterminations.

Connaissant Ω_1, on pourra, pour chaque valeur de u, calculer $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ par les formules du n° 78.

ADDITIONS

Au n° 51 (3e partie, ch. II) nous avons laissé au lecteur le soin de vérifier la formule

$$\sigma(u - 2\omega_1) = -e^{-2\eta_1(u-\omega_1)}\,\sigma u.$$

On l'établit immédiatement en changeant u en $u - 2\omega_1$ dans la relation démontrée (2e partie, ch. III, 32)

$$\sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma u.$$

Au chap. III de la 2e partie, nous avons indiqué ce que devient σu dans le cas seulement où l'on ajoute à l'argument u l'une des périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ de $\wp u$ (en supposant que les moitiés ω_1, ω_2 ne sont pas des périodes de cette dernière fonction).

Il est utile de savoir ce que devient σu quand on augmente u d'une période quelconque

$$2\omega = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Augmentant d'abord de $4\omega_1$, on a

$$\begin{aligned}\sigma(u + 4\omega_1) &= \sigma(\overline{u + 2\omega_1} + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(\overline{u+2\omega_1}+\omega_1)}\,\sigma(u + 2\omega_1)\\ &= +e^{2\eta_1(u+3\omega_1)}\,e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma u = e^{2\eta_1[2u+\omega_1(1+3)]}\,\sigma u.\end{aligned}$$

En calculant ainsi de proche en proche, on arrive à

$$\begin{aligned}\sigma(u + 2m_1\omega_1) &= (-1)^{m_1}\,e^{2\eta_1[m_1u+\omega_1(1+3+\cdots+2m_1-1)]}\,\sigma u\\ &= (-1)^{m_1}\,e^{2m_1\eta_1(u+m_1\omega_1)}\,\sigma u.\end{aligned}$$

Cette formule subsiste quand m_1 est négatif, comme cela résulte évidemment de l'expression ci-dessus de $\sigma(u - 2\omega_1)$.

Cela posé, nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(u + 2\omega) &= \sigma(\overline{u + 2m_1\omega_1} + 2m_2\omega_2)\\ &= (-1)^{m_2}\,e^{2m_2\eta_2(\overline{u+2m_1\omega_1}+m_2\omega_2)}\,\sigma(u + 2m_1\omega_1)\\ &= (-1)^{m_1+m_2}\,e^{2m_2\eta_2(u+2m_1\omega_1+m_2\omega_2)+2m_1\eta_1(u+m_1\omega_1)}\,\sigma u.\end{aligned}$$

L'exposant de e contient le terme $4m_1m_2\eta_2\omega_1$ qui, si l'on tient compte de la formule du n° 29

$$2(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = \pi i,$$

peut s'écrire

$$2m_2\eta_2 \cdot m_1\omega_1 + 2m_1\eta_1 \cdot m_2\omega_2 - m_1m_2\pi i.$$

L'expression de $\sigma(u+2\omega)$ peut alors être mise sous la forme

$$\sigma(u+2\omega) = (-1)^{m_1+m_2}\, e^{-m_1m_2\pi i}\, e^{(2m_1\eta_1+2m_2\eta_2)(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)}\, \sigma u$$

ou

$$\sigma(u+2\omega) = (-1)^{m_1+m_2+m_1m_2}\, e^{(2m_1\eta_1+2m_2\eta_2)(u+\omega)}\, \sigma u.$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

Si l'on prend la dérivée logarithmique de ses deux membres, on trouve

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2m_1\eta_1 + 2m_2\eta_2.$$

Cette nouvelle formule nous apprend ce que devient ζu quand on ajoute à l'argument u une période quelconque. Il serait facile d'y arriver directement, en partant des expressions de $\zeta(u+2\omega_1)$, $\zeta(u+2\omega_2)$ données au n° 27 (2[e] partie, ch. III).

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME PARTIE

Les fonctions sn u, cn u, dn u.

QUATRIÈME PARTIE

Les fonctions θ.

BAR-LE-DUC, IMPRIMERIE COMTE-JACQUET.

End of the Project Gutenberg EBook of Abrégé de la Théorie des Fonctions
Elliptiques, by Charles Henry

*** END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK FONCTIONS ELLIPTIQUES ***

***** This file should be named 32643-pdf.pdf or 32643-pdf.zip *****
This and all associated files of various formats will be found in:
http://www.gutenberg.org/3/2/6/4/32643/

Produced by Andrew D. Hwang, Joshua Hutchinson, and the
Online Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net
(This file was produced from images from the Cornell
University Library: Historical Mathematics Monographs
collection.)

Updated editions will replace the previous one--the old editions
will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no
one owns a United States copyright in these works, so the Foundation
(and you!) can copy and distribute it in the United States without
permission and without paying copyright royalties. Special rules,
set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to
copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to
protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project
Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you
charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose
such as creation of derivative works, reports, performances and
research. They may be modified and printed and given away--you may do
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is
subject to the trademark license, especially commercial
redistribution.

*** START: FULL LICENSE ***

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free
distribution of electronic works, by using or distributing this work

(or any other work associated in any way with the phrase "Project Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project Gutenberg-tm License (available with this file or online at http://gutenberg.org/license).

Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to and accept all the terms of this license and intellectual property (trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm License terms from this work, or any files containing a part of this

work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than "Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg-tm web site (www.gutenberg.org), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, "Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."

- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm License. You must require such a user to return or

destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg-tm works.

- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.

- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread public domain works in creating the Project Gutenberg-tm collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain "Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTIBILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from

people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at http://www.pglaf.org.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at http://pglaf.org/fundraising. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at http://pglaf.org

For additional contact information:
Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be

freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations ($1 to $5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit http://pglaf.org

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: http://pglaf.org/donate

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

http://www.gutenberg.org

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.